Série A, N° 4955
N° d'ordre : 4104

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

J.-C. ARON

1re THÈSE. — MÉCANIQUE ALÉATOIRE ET MICROPHYSIQUE

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 6 juin 1963 devant la Commission d'examen.

M. LICHENEROWICZ *Président.*
Mme CHOQUET-BRUHAT } *Examinateurs.*
M. THIRY }

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1963

Série A, N° 4955
N° d'ordre : 4104

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

J.-C. ARON

1re THÈSE. — MÉCANIQUE ALÉATOIRE ET MICROPHYSIQUE

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 6 juin 1963 devant la Commission d'examen.

M. LICHENEROWICZ *Président.*
Mme CHOQUET-BRUHAT } *Examinateurs.*
M. THIRY }

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1963

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralo. et Cristallo.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT.....	T	Biologie Vég. (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie Générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN....	T	Biologie Animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Toologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie S.P.C.N. et Sédimen.
GAUTHERET .. r	T	Biologie Vég. (P.C.B.).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND.....	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécanique Exp. des Fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC....	T	Biologie Vég. (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS .	T	Chimie Physique.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER ...	T	Biologie Géné. (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN.....	T	Mécanique Générale.
DUBREIL	T	Arithm. et Théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie Organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER ...	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES ..	T	Théories Physiques.
AMIEL.....	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J.-P. MATHIEU	T	Physique Optique
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN.....	T	Biologie Végét. marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul diff. et Intégral.
NORMANT	T	Chimie organique.
BENARD	T	Chimie Minérale.
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
DUGUÉ	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théor. et appliquée
KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
CHADEFAUD ...	T	Botanique.
Mlle Le BRETON.	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS.....	T	Anatomie et Histol. Comp.
EHRESMANN ...	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD ...	T	Géographie Phys. et Géol. dynamique.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Techn. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET	T	Génétique.
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT.	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique gén.
BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY.	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PIAUX.....	T	Chimie (M.P.C.).
BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL .	T	Mathématique (Agrég.).
Mme LELONG ..	T	Mathématiques II (E.N.S.).
BELLAIR'	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E....	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ ...	T	Chimie Physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.

Camus	T	Physiol. Végétale B.M.P.V.
Castaing	T	Physique II Thermody. Orsay.
Curien.....	T	Minéral. et Cristallog.
Moyse	T	Physiologie végét. Orsay.
Noirot.....	T	Évolution des Êtres Org.
Pannetier	T	Chimie générale.
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann	T	Chimie quantique.
Teillac	T	Physique Nucl. et Radio-activité.
Tonnelat	T	Biologie Physico-chim.
Ville	T	Économétrie.
Willemart ...	T	Chimie (P.C.B.).
Dode	T	Chimie (Orsay).
Freymann	T	Recherches Physiques.
Guinochet	T	Biol. vég. S.P.C.N. (Orsay).
Rollet	T	Chimie minérale.
Mlle Josien ...	T	Chimie S.P.C.N.
Chevalley ...	T	Géométrie algéb. et théorie des groupes.
Arnoult	T	Électronique (Orsay).
Chapelle	T	Physique (Orsay).
Delange	T	Mathématiques I (Orsay).
Deny	T	Mathématiques Géné. Orsay.
Germain	T	Mécanique théor. des fluides.
Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie Physique.
Berthelot	T	Phys des particules Fond.
Bricart	T	Météor. et Phys. de l'Atmosphère.
Mme Albe-Fessard	T	Psychophysiologie.
Friedel.....	T	Physique des Solides (Orsay).
M. Julia	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.
Lender	T	Biologie Anim. S.P.C.N., Orsay.
Magat	T	Physico-Chimie des radio-éléments.
Mlle Quintin ..	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiol. anim. (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Lemee	T	Physiol. Vég. B.M.P.V. (Orsay).
Guérin	T	Chiuie M.P.C. (Orsay).
Chatelet M. ..	T	Chimie P.C.B.
Jean.....	T	Physique Nucléaire, Orsay.
Mattler	T	Physique S.P.C.N.
Bergerard ...	T	Zoologie (Orsay).
Bertein.....	T	Électronique (Orsay).
Bouissières ...	T	Chimie des radioélém. (Orsay).
Mme Couture .	T	Thermodynamique et Méc. Physique.
Ellenberger .	T	Géologie des grandes régions du globe.
Franc	T	Biologie animale P.C.B.
Schnell		Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowski ...	T	Physiologie végétale.
Acher		Chimie Biol. (Orsay).
Baudoin		Biologie animale P.C.B.
Beaumont		Biologie animale S.P.C.N.
Blamont	T	Géophysique ionosphère.
Bourreau		Botanique.
Curie D.		Physique M.G.P.
Durand-Delga	T	Géologie
Fréon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller.....	T	Physiolog. végétale.
Tortrat	T	Calcul des Probabilités.
Cailleux		Géologie (S.P.C.N.).
Magnan		Physique S.P.C.N.
Daudel		Mécanique ondulatoire appliq. à la chimie Théorique et à la Phys. Nucléaire.
Mlle Fourcroy		Biologie Végétale S.P.C.N.
Mme Choquet-Bruhat	T	Mécan. Analytique et méca. céleste.
Mlle Veil		Physiologie Générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck....	T	Mécan. Phys. et Expérim.
Lacombe	T	Métallurg. des métaux Nucléaires.
Brochard	T	Physique P.C.B. (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Mathématiques I (Orsay).
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire		Géographie phys. et Géolog. Dynamique.
Comolet	T	Mécanique des fluides.
Corabœuf		Physiologie animale, Orsay.
Delloue		Physique de l'exosphère.
Gorenflot ...		Botanique II (Orsay).
Houillon		Biologie animale P.C.B.
Jullien J.		Chimie S.P.C.N. (Orsay).
Malgrange....	T	Technique Math. de la Physique (Orsay).
Olivier		Antropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre	T	Physique E.N.S. (Orsay).
Chevaugeon...	T	Botanique (Orsay).
Kahane	T	Mathématiques (Orsay).
Samuel	T	Mathémat. E.N.S. féminines.
Kourganoff ..	T	Astronomie (Orsay).
Thiry.....	T	Mécanique céleste.
Abeles		Physique S.P.S.C.N.
Amat		Physique P.C.B,
Auboin		Géologie
Mme Benoit-Gueutal ...		Physique Nucl. et radioactivité.
Bougis		Biologie marine (Villefranche/emr.)
Bruhat	T	Mathématiques M.P.C.
Brunn	T	Géologie historique (Orsay).
Chabbal		Physique M.G.P. (Orsay).
Deheuvels ...	T	Mathématique Propé. (Orsay).
D'Espagnat ...		Physique théorique (Orsay).
Furon		Géologie S.P.C.N.
Mme Gans	T	Génétique.
Geneves		Biologie végétale P.C.B.
Guilbert		Physique (CUS Orléans).
Hupe		Pétrographie.
Hollande	T	Biologie générale.
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte.....		Chimie P.C.B.
Meyer		Physique propédeutique.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel.....		Biologie générale.
Ravier		Pétrographie.
Roseau	T	Mécanique théorique des Fluides.
Roubine		Électronique.
Silber	T	Chimie P.C.B.
Uebersfeld ..	T	Électronique.
Yvon	T	Théories Physiques.

Le secrétaire Général... R. Poullain.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538112_0017

Alger. Mathématiques,
Tome X, n° 1, 1963.

J. C. ARON (Alger).

MÉCANIQUE ALÉATOIRE ET MICROPHYSIQUE

NOTATIONS

h = constante de Planck : $\frac{h}{2\pi} = \hbar$, m_0 = masse propre,

$$l_0 = \frac{\hbar}{m_0 c},$$

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{m_0 c^2},$$

$\bar{x}$ = valeur moyenne de x,

∇ = gradient,

Δ = laplacien,

$\Box$ = dalembertien $= \sum_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

$\wedge$ = symbole du produit vectoriel. Les autres symboles vectoriels sont désignés par leurs abréviations ($\overrightarrow{\text{rot.}}$, div., etc...).

$\frac{D}{Dt}$ = dérivée totale en suivant la particule.

Coordonnées.

Indices grecs allant de 1 à 4 — (espace-temps de Minkovski).

Indices latins allant de 1 à 3

$$x_0 = \frac{x_4}{i} = ct$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ = tenseur dont les composantes sont nulles si deux indices sont égaux; égales à + 1 ou — 1 selon que $\alpha\beta\gamma\delta$ est une permutation paire ou impaire de *xyzt*.

(Même définition pour ε_{ijk}).

Spineurs.

φ = spineur à 4 composantes de Dirac.

Φ ou ψ spineur à deux composantes (Φ = spineur droit, ψ = spineur gauche).

(Droit = direct = vis à droite; gauche = rétrograde = vis à gauche).

Matrices.

$\alpha_i \ldots \alpha_4$ = matrices de Dirac

$$\gamma_i = i\alpha_4\alpha_i,$$
$$\gamma_4 = \alpha_4,$$
$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4.$$

$\sum_i \sum_4$ = matrices de Pauli.

$$\sum_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \sum_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \qquad \sum_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \sum_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

φ^* = complexe conjugué de φ.

Γ^T = transposé de Γ.

Γ^+ = adjointe de la matrice Γ.

$$\overline{\Gamma} = \Gamma^+\gamma_4.$$

Divers.

La représentation hydrodynamique tirée par M. Takabayasi des équations de Dirac sera désignée par ($\mathcal{R}$).

Symbole des références à la bibliographie [23].

Rappel des formules : V (4) pour formule 4 du chapitre V, (6) pour la formule (6) du chapitre en cours.

INTRODUCTION

Nous rappellerons brièvement les questions d'ordre général qui se posent en mécanique quantique, et qui, dans le présent travail, feront l'objet d'études ou de suggestions.

1. La limite inférieure du continu spatio-temporel.

En dehors des difficultés traditionnelles que soulève, pour l'espace et le temps, le concept d'un continu divisible à l'infini, plusieurs motifs poussent aujourd'hui à sa révision. L'espace des phases a déjà été utilement découpé en cellules de volume h^3. Mais surtout les divergences rencontrées en théorie quantique des champs apparaissent comme imputables à l'absence d'une limite inférieure pour les espaces et les durées, ou encore à la nature ponctuelle attribuée aux particules.

De nombreuses recherches ont tenté de répondre à ce souci : les unes de nature purement mathématique (espace temps quantifié de Snyder [1], espace temps réticulé de Schild [2], etc...), les autres d'inspiration physique, qui tendaient :

— soit à doter les particules d'une structure étendue (Yevick [3], Jakobi et Kolesnikof [4] etc...).

— soit, conservant l'aspect ponctuel des particules, à les remplacer pratiquement par un globule d'incertitude de localisation (de Broglie [5], Rosen [6]) ou à introduire pour l'espace et le temps des minima mesurables (March) [7].

---

(1) *Phys. Rev.*, 71, 1, 1947, (79).
(2) *Canad. Journ. of Math.*, 1, 1949, (29).
(3) *Phys. Rev.*, 85, 5, 1952, (911).
(4) *CR. Acad. Sc.*, 1957, 3, (17 Juillet).
(5) *CR. Acad. Sc.*, 200, 1935, (361).
(6) *Phys. Rev.*, 72, 1947, (298).
(7) *Acta physica austriaca.*, 1, 1947, (19).

Mais tous les essais comportant des constantes minimales se sont heurtés au problème de leur variance relativiste, qui n'a pu être résolu sans artifice. Le conflit avec la relativité apparaît aussi en théorie des champs, quand on essaie de rendre convergents les développements des ordres successifs; il suggère l'idée d'une limite de validité de la relativité dans le domaine microscopique.

2. L'incertitude de localisation.

Dans les travaux susmentionnés, il s'agissait de conceptions *a priori*; mais la notion d'un seuil pour les longueurs se dégage des équations quantiques elles-mêmes : elles montrent qu'au-dessous de la longueur d'onde de Compton $\lambda = h/m_0 c$ les longueurs cessent d'être mesurables, et qu'alors apparaissent dans les formules des caractères physiquement peu admissibles.

D'abord c'est pour des groupes d'ondes de dimensions inférieures à λ qu'adviennent les composantes d'énergie négative. On en conclut souvent que l'énergie négative est nécessaire, puisqu'elle permet la localisation. Mais il suffit, plus restrictivement, de constater que la suppression des états d'énergie négative est liée à la suppression de la localisation ponctuelle.

Or la possibilité de cette localisation disparaît justement, comme l'ont montré MM. Newton et Wigner [1], avec le passage de l'équation de Schrödinger à l'équation de Klein-Gordon (ou de Dirac).

a) *L'opérateur de position dans l'équation de Schrödinger.*

On sait qu'un opérateur hermitien $\mathcal{A}$ est caractérisé par l'égalité :

$$(\psi, \mathcal{A}\Phi) = (\mathcal{A}\psi, \Phi).$$

Soient alors les solutions de l'équation de Schrödinger, qui peuvent s'écrire par développement

$$(1) \qquad \psi(\vec{x}t) = \int d^3p \exp\left\{-i\frac{E_p}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar}\right)\psi(\vec{p}).$$

Constituons un espace de Hilbert avec les fonctions $\psi(\vec{p})$ correspondant à l'ensemble des solutions, et cherchons à définir un opérateur de position hermitien.

Si nous considérons l'opérateur

$$\vec{X} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$$

nous voyons d'abord qu'il satisfait à :

$$\vec{\mathrm{X}}\left\{\exp\left(i\vec{p}\,\frac{\vec{x}}{\hbar}\right)\right\} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left\{\exp\left(i\vec{p}\,\frac{\vec{x}}{\hbar}\right)\right\} = \vec{x}\exp\left(i\vec{p}\,\frac{\vec{x}}{\hbar}\right)$$

Il admet donc $\vec{x}$ comme valeur propre.

D'autre part, dans la représentation des moments où nous nous sommes placés, formons le produit scalaire

$$(2)\qquad [\psi(\vec{p}),\ \vec{\mathrm{X}}\Phi(\vec{p})] = -i\hbar\int d^3\vec{p}\,\psi^*(\vec{p})\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\Phi(\vec{p}).$$

Par intégration par parties, les coefficients de Fourier $\Phi(\vec{p})$ ou $\psi(\vec{p})$ s'annulant pour p infini, on obtient :

$$[\psi(\vec{p}),\ \vec{\mathrm{X}}\Phi(\vec{p})] = i\hbar\int d^3p\Phi(\vec{p})\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\psi^*(\vec{p}) = [\vec{\mathrm{X}}\psi(\vec{p}),\ \Phi(\vec{p})].$$

L'opérateur $\vec{\mathrm{X}}$ est donc hermitien.

b) *L'opérateur de position dans l'équation de Klein-Gordon.*

Dans le cas relativiste, si $\psi(\vec{x}t)$ est invariant, l'équation (1) ne définit plus $\psi(\vec{p})$ comme invariant. Le rapport $\frac{d^3\vec{p}}{\mathrm{E}_p}$ étant invariant, il faut remplacer (1) par :

$$(3)\qquad \psi(\vec{x}t) = \int\frac{d^3\vec{p}}{\mathrm{E}_p}\exp\left(-i\frac{\mathrm{E}_p t}{\hbar}\right)\exp\left(i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar}\right)\psi(\vec{p}).$$

Mais alors l'opérateur $\vec{x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ n'est plus hermitien, car dans (2) il faut maintenant remplacer $d^3\vec{p}$ par $\frac{d^3\vec{p}}{\mathrm{E}_p}$, et l'on a :

$$\left(\psi, -i\hbar\frac{\partial\Phi}{d\vec{p}}\right) = -i\hbar\int\frac{d^3\vec{p}}{\mathrm{E}_p}\psi^*(\vec{p})\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\Phi(\vec{p})$$

$$= \int\frac{d^3\vec{p}}{\mathrm{E}_p}\left[\left(+\frac{\partial}{\partial\vec{p}} - \frac{i\hbar\vec{p}}{p^2+m_0^2c^2}\right)\psi^*(\vec{p})\right].\Phi(\vec{p})$$

$$\neq\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\psi,\ \Phi\right).$$

L'opérateur $\vec{x}$ cessant d'être hermitien, cesse donc aussi d'être mesurable. Dans la représentation spatiale, les fonctions propres correspondant aux coordonnées ne peuvent plus être les fonctions δ de Dirac.

MM. Newton et Wigner [1] ont défini par les conditions suivantes les fonctions propres correspondant à un système localisé pour $t = 0$ au point $x = 0$:

1) Elles forment un ensemble linéaire (So).

2) Cet ensemble est invariant sous les rotations, réflexions, et renversements du temps.

3) Un déplacement spatial remplace une fonction propre de (So) par une nouvelle fonction orthogonale à toutes celles de (So).

Soient alors dans l'espace des moments : p, θ et φ les coordonnées sphériques du vecteur $\vec{p}$. Les variétés linéaires invariantes par rapport aux rotations autour de l'origine ($p = 0$) sont, pour chaque entier j, les $2j + 1$ harmoniques sphériques :

$$P_m^j(\theta, \varphi) f(p) \quad (m = -j, -j + 1, \ldots j - 1, j)$$

$f(p)$ étant une fonction arbitraire; par la condition d'invariance sous les renversements du temps on montre qu'elle peut être choisie réelle.

Dans l'espace des moments, l'opérateur qui correspond au déplacement $\vec{a}$ d'espace est :

$$T(\vec{a}) = \exp i\left(\frac{\vec{a}.\vec{p}}{\hbar}\right)$$

d'après un raisonnement classique de la théorie des groupes [1].

La condition 3) ci-dessus donne alors pour la fonction propre Φ :

$$\int |\Phi(\vec{p})|^2 \exp i\left(\frac{\vec{a}\vec{p}}{\hbar}\right) \frac{d^3\vec{p}}{p_0} = 0 \quad (p_0^2 = \vec{p}^2 + m_0^2 c^2)$$

---

[1] Les étapes du raisonnement sont les suivantes :

Dans l'espace des $\vec{x}$ un déplacement infinitésimal $\vec{a}$ donne

$$\psi \to \psi' = \left(1 + a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\psi.$$

On en déduit par l'expression des coefficients de Fourier :

$$\psi'_p = \psi_p \left(1 + i\frac{\vec{a}\vec{p}}{\hbar}\right).$$

Pour un déplacement $\vec{a}$ fini, on le décompose en déplacements infinitésimaux $\frac{\vec{a}}{\sigma}$, et $\psi'_p = \left(1 + i\frac{\vec{a}\vec{p}}{\hbar\sigma}\right)^\sigma \sim \exp i\frac{\vec{a}\vec{p}}{\hbar}$ (quand $\sigma \to \infty$).

ce qui par inversion signifie que $\frac{|\Phi(p)|^2}{p_0}$ a toutes ses composantes de Fourier nulles, et se réduit donc à une constante. En portant dans (3) on obtient, à une constante près; pour $t = 0$:

$$\Phi(\vec{x}, 0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{p_0}} \exp i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar}.$$

Par isotropie on peut prendre le point $\vec{x}$ sur un des axes de coordonnées, et en fonction de sa distance r à l'origine $\Phi(r, 0)$ s'exprime sous la forme d'une fonction de Hankel $H^1_{5/4}\left(\frac{im_0c^2}{\hbar}\right)$ qui décroît comme $\exp\left(-\frac{m_0cr}{\hbar}\right)$ pour r infini.

On en déduit que les fonctions propres ont un domaine d'extension de l'ordre de $l_0 = \frac{\hbar}{m_0c} = \frac{\lambda}{2\pi}$, ($\lambda$ étant la longueur d'onde de Compton), ce qui donne pour la position une indétermination du même ordre.

De l'expression des fonctions propres on déduit celle de l'opérateur de position $\vec{q}$ défini par :

$$\vec{q}(p_0^{1/2} \exp(-i\vec{p}\vec{x})] = \vec{x}[p_0^{\frac{1}{2}} \exp(-i\vec{p}\vec{x})]$$

On voit aisément que l'opérateur

$$\vec{q} = -i\hbar\left(\partial_{\vec{p}} + \frac{\vec{p}}{2p_0^2}\right)$$

satisfait à cette condition.

Les raisons de l'extension spatiale des fonctions d'ondes ont été étudiées par MM. Newton et Wigner. Ils rappellent que pour expliquer l'impossibilité de mesurer la position d'une particule avec une précision supérieure à λ, on allègue souvent la formation de paires qui accompagnerait une telle mesure; ils font valoir qu'il est peu vraisemblable que cette création de paires donne la même limitation en fonction de λ, pour des systèmes aussi différents que l'électron, le nucléon, etc.... La limitation trouvée pourrait donc avoir une base plus profonde.

Pour l'équation de Dirac les mêmes auteurs ont trouvé une limitation similaire; par ailleurs ils ont observé que l'opérateur de position $\vec{q}$ change un état d'énergie positive en un état d'énergie positive.

3. Mécanique quantique et mécanique aléatoire.

La notion d'une incertitude de localisation conduit assez naturellement à celle de phénomènes aléatoires. Or l'idée que de tels phénomènes pourraient être à la base de la mécanique quantique, a été amenée, tout différemment, par les difficultés d'interprétation inhérentes au dualisme des aspects ondulatoire et corpusculaire. Einstein a notamment suggéré que des mouvements stochastiques seraient sous-jacents aux apparences du niveau quantique.

Cette idée est à la base du présent travail.

Si alors on examine, parmi les processus aléatoires, ceux (dont le mouvement brownien est un exemple) qui comportent une variation infiniment rapide de la position par unité de temps, on constate qu'ils contiennent une longueur et une durée minimales : supposer en effet que le nombre des chocs par unité de temps est infini, c'est dire que la durée et la longueur du libre parcours moyen sont négligeables à l'échelle des phénomènes étudiés, ou encore que cette durée et cette longueur constituent des seuils d'application pour les lois régissant ces processus.

4. Confrontation avec la relativité.

Nous avons rappelé que l'obstacle majeur à l'introduction de constantes minimales vient de la relativité. Or, à première vue, le mouvement brownien paraît lui aussi incompatible avec la relativité car l'élément stochastique n'ayant pas de vitesse, il est impossible de lui attacher un référentiel. Par ailleurs, comme l'a fait remarquer M. Bass [1], il semble peu probable qu'on parvienne à constituer un espace-temps avec trois composantes aléatoires d'espace et une composante certaine de temps.

Dès lors il y a lieu de se demander si une connexion entre ces deux difficultés parallèles pourrait contribuer à lever l'une et l'autre.

Par ailleurs il est remarquable que l'incertitude de localisation, dans l'étude de Newton et Wigner, se soit manifestée précisément avec le passage aux équations d'onde relativistes. Dans un autre ordre

---

[1] *Application de la mécanique aléatoire à l'hydrodynamique et à la mécanique quantique.* Publication du Ministère de l'air, 1949, (page 16).

d'idées, pourquoi est-ce avec la relativité qu'apparaît le spin, par le formalisme de Dirac? Et pourquoi le formalisme de Pauli, qui est considéré comme l'approximation du premier pour les vitesses faibles (1) ne donne-t-il pas une représentation exacte de l'atome d'hydrogène, où aucune vitesse n'est relativiste? L'ordre de grandeur des vitesses de translation suffit-il, en microphysique, à définir le domaine de la relativité?

Sans aborder *a priori* cette question, nous la verrons se présenter au cours de notre étude.

5. Plan du présent travail.

La première partie commence (chapitres I et II) par un bref rappel des propriétés des processus aléatoires. Le chapitre III concerne le seuil de la diffusion, notion implicitement contenue dans la définition classique de la diffusion, et qui tente d'une part de donner un sens physique aux constantes de temps et de longueur introduites, d'autre part d'éclairer les rapports entre la théorie de la diffusion et la relativité.

Dans la deuxième partie nous montrons comment les lois de la mécanique quantique non relativiste (potentiel quantique, équation de Schrödinger) peuvent se déduire de celles de la diffusion. Nous étendons ensuite ce résultat à la mécanique quantique relativiste, après avoir au préalable proposé une théorie relativiste de la diffusion. Les relations d'incertitude sont également déduites.

La troisième partie est une extension au domaine où intervient le spin; elle conduit à un modèle de l'équation de Dirac, permettant une définition concrète de certaines des grandeurs constituant la structure des particules élémentaires (charge, isospin). Une interprétation des états quantifiés (composantes du spin, atome d'hydrogène) est proposée.

Enfin dans la quatrième partie nous émettons des suggestions quant aux fondements physiques des formalismes introduits.

(1) Ce point sera discuté (chapitre IX).

PREMIÈRE PARTIE

LES PROCESSUS DE DIFFUSION

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE NOTIONS SUR LES PROCESSUS ALEATOIRES ABSOLUMENT CONTINUS

Après avoir rappelé quelques définitions et propriétés des fonctions aléatoires absolument continues, nous donnerons des indications sur les chaînes simples et leur généralisation, qui servent de base à la deuxième partie du présent travail.

1. Définitions et propriétés fondamentales.

Loi de probabilité absolument continue.

Soient un certain nombre de variables aléatoires; par exemple trois variables $\xi\eta\zeta$, qui pourront être les coordonnées d'un point aléatoire π dans un espace à trois dimensions.

Une loi de probabilité pour les trois variables est dite *absolument continue*, s'il existe une fonction $f(xyz)$ telle que la probabilité pour le point π d'être situé dans un volume dv entourant un point $M(xyz)$, puisse s'écrire

$$f(xyz)\,dv.$$

Cette condition sera toujours supposée réalisée par la suite.

On a alors en intégrant dans tout l'espace :

$$\int f(xyz)\,dv = 1.$$

Processus stochastiques.

Si les lois de probabilité qui concernent les coordonnées de π évoluent dans le temps, on dit qu'il s'agit d'un *processus stochastique.*

On peut être amené à considérer :

soit le comportement relatif de deux ou plusieurs coordonnées de π au même temps t (corrélation ou indépendance, valeurs moyennes de produits associés, etc...) ;

soit la liaison aléatoire entre les positions M_1, M_2, ... M_n de π aux temps t_1, t_2, ... t_n.

C'est pratiquement la seconde étude qui présente le plus d'intérêt. En général la position de π au temps t_n dépendra de ses positions aux temps $t_1 t_2 \ldots t_{n-1}$; on dit alors que le processus est *héréditaire.*

Dans tous les cas on peut définir, en désignant par $\vec{\vec{X}}$ l'ensemble des coordonnées $(\xi\eta\zeta)$ de π :

une *probabilité simple* $\mathcal{P}(\vec{x}_i t_i)\, d\vec{x}_i$; probabilité que π soit au temps t_i dans le volume $d\vec{x}_i$ entourant la position $M_i(\overrightarrow{OM}_i = \vec{x}_i)$;

des *probabilités liées* : par exemple

$$P[\vec{\vec{X}}(t_n) = \vec{x}_n / \vec{\vec{X}}(t_1) = \vec{x}_1 ; \quad \vec{\vec{X}}(t_2) = \vec{x}_2, \ldots \vec{\vec{X}}(t_{n-1}) = \vec{x}_{n-1}]\, d\vec{x}_n$$

probabilité que π soit au temps t_n dans le volume $d\vec{x}_n$, sachant qu'il occupe les positions $\vec{x}_1$ au temps t_1, $\vec{x}_2$ au temps t_2, etc...,

des *probabilités conjuguées*, telles que $\mathcal{P}_k(\vec{x}_1 t_1, \ldots \vec{x}_k t_k)\, d\vec{x}_1 \ldots d\vec{x}_k$, probabilité que π soit à la fois dans $d\vec{x}_1$ à t_1, ..., $d\vec{x}_k$ à t_k.

Les relations suivantes sont immédiates, les intégrales étant prises dans l'espace entier :

$$(1) \qquad \int \mathcal{P}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_i = 1$$

$$(2) \qquad \int P[\vec{\vec{X}}(t_n) = \vec{x}_n / \vec{\vec{X}}(t_1) = \vec{x}_1 \ldots, \vec{\vec{X}}(t_n - 1) = \vec{x}_{n-1}]\, d\vec{x}_n = 1$$

$$(3) \qquad \mathcal{P}_n(\vec{x}_1 t_1, \ldots \vec{x}_n t_n) = \mathcal{P}_{n-1}(\vec{x}_1 t_1 \ldots, \vec{x}_{n-1} t_{n-1}) \times P[\vec{\vec{X}}(t_n) = \vec{x}_n / \vec{\vec{X}}(t_1) = \vec{x}_1 \ldots, \vec{\vec{X}}(t_{n-1}) = \vec{x}_{n-1}]$$

$$(4) \qquad \mathcal{P}[\vec{x}_n t_n] = \int \mathcal{P}_n(\vec{x}_1 t_1, \ldots, \vec{x}_n t_n)\, d\vec{x}_1, \ldots, d\vec{x}_{n-1}$$

$$(5) \qquad \mathcal{P}_{n-1}(\vec{x}_1 t_1, \ldots \vec{x}_{n-1} t_{n-1}) = \int \mathcal{P}_n(\vec{x}_1 t_1, \ldots, \vec{x}_n t_n)\, d\vec{x}_n.$$

Un processus est dit : *processus de Markoff*, ou chaîne simple, si la loi de probabilité de $\vec{\vec{X}}(t_n)$ ne dépend que de la position $\vec{x}_{n-1}$ au temps t_{n-1}.

On écrira alors

$$P[\vec{X}(t_n) = \vec{x}_n/\vec{X}(t_1) = \vec{x}_1 \ldots X(t_{n-1}) = x_{n-1}] = P(\vec{x}_{n-1}t_{n-1},\ \vec{x}_n t_n)$$

et cette grandeur sera appelée : *probabilité de transition.*

La définition des chaînes simples, donnée pour des processus discontinus, se transpose au cas des processus continus en faisant croître indéfiniment le nombre n des mesures de position; les instants $t_1 \ldots t_n$ sont alors infiniment rapprochés, et la chaîne simple se définit comme celle où la loi de probabilité de $\vec{X}(t + dt)$ ne dépend que de t et de $\vec{X}(t)$.

Un cas particulier des chaînes simples est celui des *processus indépendants*; le déplacement aléatoire : $\vec{U}_n = \vec{X}(t_n) - \vec{X}(t_{n-1})$ est indépendant de $\vec{X}(t_{n-1})$; on a alors pour la densité de probabilité conjuguée de deux valeurs $\vec{x}_{n-1}$ et u_n une décomposition de la forme

$$\mathcal{P}(\vec{x}_{n-1}\vec{u}_n) = \mathcal{P}(\vec{x}_{n-1})\mathcal{P}'(\vec{u}_n) \quad (\vec{u}_n = \vec{x}_u - \vec{x}_{n-1}).$$

Or la densité de probabilité conjuguée du couple $\vec{x}_{n-1}\vec{x}_n$ (ou encore $\vec{x}_{n-1}\vec{u}_n$), est :

$$\mathcal{P}_2(\vec{x}_{n-1}\vec{u}_n) = \mathcal{P}(\vec{x}_{n-1})P[\vec{U}_n = \vec{u}_n/\vec{X}(t_{n-1}) = \vec{x}_{n-1}].$$

La densité de probabilité liée de $\vec{x}_n$ pour $\vec{X}(t_{n-1}) = \vec{x}_{n-1}$ est donc $\mathcal{P}'(\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1})$.

Moments.

Désignons par $\rho(\vec{x}t)$ la densité de probabilité, qui pourra être soit la densité simple, soit la densité liée à une ou plusieurs positions antérieures. Suivant la définition de ρ on aura une définition correspondante des moments d'ordre k; l'un de ces moments, m_{abc} avec $a + b + c = k$) ($o \ll a, b, c \leqslant k$) s'exprime ainsi :

$$m_{abc} = \int x^a y^b z^c \rho(\vec{x}t)d\vec{x}.$$

On définit de même les moments m'_{abc} des écarts par rapport à la moyenne du premier ordre $\bar{\vec{x}} = \int \vec{x}\rho(\vec{x}t)d\vec{x}$, par la relation :

$$m'_{abc} = \int (x - \bar{x})^a (y - \bar{y})^b (z - \bar{z})^c \rho(\vec{x}t)d\vec{x} \quad (a + b + c = k).$$

Rappelons la définition classique des moments du second ordre

pris sur une coordonnée :

— *moyenne quadratique* : $M_i = \sqrt{(m_{0\ldots2\ldots0})_i}$; soit : $M_i^2 = \int x_i^2 \rho(\vec{x}t)d\vec{x}$;

— *écart quadratique* (ou *dispersion* $\mu_i = \sqrt{(m'_{0\ldots2\ldots0})_i}$; soit :

$$\mu_i^2 = \int (x_i - \bar{x}_i)^2 \rho(\vec{x}t)d\vec{x}$$

et la relation :

$$M_i^2 = (\bar{x}_i)^2 + \mu_i^2.$$

Plus généralement, si x et y sont deux variables aléatoires de corrélation nulle, — c'est-à-dire si $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ (ce qui a lieu en particulier pour des variables indépendantes), on a

$$(5\text{ bis}) \quad \overline{(x+y)^2} = \int (x+y)^2 \mathcal{P}(x\,y)dx\,dy = \overline{x^2} + \overline{y^2} + 2\bar{x}\,\bar{y}$$

2. Propriétés des processus de Markoff.

A. L'équation de Chapman.

Soit une chaîne simple; considérons trois instants t_1, t, t_2 avec $t_1 < t < t_2$. L'équation (3) s'écrit :

$$(6) \qquad \mathcal{P}_3(\vec{x}_1t_1,\ \vec{x}t,\ \vec{x}_2t_2) = \mathcal{P}_2(\vec{x}_1t_1,\ \vec{x}t)\ P(\vec{x}t,\ \vec{x}_2t_2).$$

Exprimons que pour venir de la position $\vec{x}_1(t_1)$ à la position $\vec{x}_2(t_2)$ le point aléatoire a pu passer par toute position $\vec{x}$ au temps t; $\mathcal{P}_2(\vec{x}_1t_1, \vec{x}_2t_2)$ s'obtiendra par intégration de (6) sur $\vec{x}$, dans l'espace entier; on aura donc :

$$(7) \qquad \mathcal{P}_2(\vec{x}_1t_1, \vec{x}_2t_2) = \int \mathcal{P}_2(\vec{x}_1t_1, \vec{x}t)\ P(\vec{x}t, \vec{x}_2t_2)d\vec{x}.$$

Or par (3) :

$$\mathcal{P}_2(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \mathcal{P}(\vec{x}_1t_1)\ P(\vec{x}_1t_1, \vec{x}_2t_2),$$
$$\mathcal{P}_2(\vec{x}_1t_1, \vec{x}t) = \mathcal{P}(\vec{x}_1t_1)\ P(\vec{x}_1t_1, \vec{x}t)$$

d'où en divisant (7) par $\mathcal{P}(\vec{x}_1t_1)$

$$(8) \quad P(\vec{x}_1t_1, \vec{x}_2t_2) = \int P(\vec{x}_1t_1, \vec{x}t)P(\vec{x}t, \vec{x}_2t_2)d\vec{x} \quad (t_1 < t < t_2)$$

C'est l'*équation de Chapman.*

Si en particulier la position $\vec{x}_1$ au temps t_1 est connue, les deux probabilités de transition définies à partir de $\vec{x}_1$ se confondent avec des probabilités simples, et l'équation (8) devient (avec t' et $\vec{x}'$ au lieu de t_2 et $\vec{x}_2$).

$$(9) \qquad \mathfrak{P}(\vec{x}'t') = \int \mathfrak{P}(\vec{x}t)\, \mathrm{P}(\vec{x}t, \vec{x}'t')d\vec{x}$$

B. Comportement des moments sous une variation temporelle infiniment petite.

a) *Hypothèses préalables.*

Nous ferons l'étude pour les moments des trois premiers ordres, en adaptant aux fonctions aléatoires de trois variables une démonstration donnée par Kolmogoroff pour les fonctions d'une variable.

Les conditions suivantes seront supposées réalisées :

1° Pour $t \neq t^0$, toutes les dérivées partielles de $\mathrm{P}(\vec{x}^0t^0, \vec{x}t)$ jusqu'au troisième ordre existent et, pour $\vec{x}$ et t fixes sont uniformément bornées en x_i^0 et t^0 pour $t - t^0 > \tau > 0$.

2) Les moments d'ordre σ des variations $\vec{\mathrm{X}}(t) - \vec{\mathrm{X}}(t^0)$ liées à la position $\vec{\mathrm{X}}(t_0) = \vec{x}_0$ tendent vers zéro avec $t - t^0$ pour $\sigma \leqslant 3$; soit :

$$(10) \quad (m_{abc}) = \int (x - x^0)^a (y - y^0)^b (z - z^0)^c \mathrm{P}(\vec{x}^0t_0, \vec{x}t)\, d\vec{x} \to 0$$
$$(a + b + c = \sigma, \quad 0 \leqslant a, b, c \leqslant \sigma, \quad \sigma = 1, 2, 3).$$

3) De plus :

$$(11) \qquad \frac{(m_{abc})}{(m_{ij})} \to 0 \text{ uniformément en } \vec{x}^0 \text{ pour } t - t^0 \to 0.$$

Remarquons que cette condition est certainement réalisée si pour $t - t^0$ infiniment petit, en désignant par $\mathrm{V}(\varepsilon)$ le volume intérieur à la sphère de rayon ε entourant le point $\vec{x}^0$, on a, si petit que soit ε, pour $t' - t^0$ assez petit :

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_{\mathrm{V}(\varepsilon)} (x - x^0)^a (y - y^0)^b (z - z_0)^c \mathrm{P}(\vec{x}^0t_0, \vec{x}t)\, d\vec{x}}{\displaystyle\int_{\text{espace entier}} (x - x_0)^a (y - y^0)^b (z - z_0)^c \mathrm{P}(\vec{x}^0t_0, \vec{x}t) d\vec{x}} \to 1 \\ \dfrac{\displaystyle\int_{\mathrm{V}(\varepsilon)} (x - x^0)^i (y - y^0)^j \mathrm{P}(\vec{x}^0t^0, \vec{x}t)\, d\vec{x}}{\displaystyle\int_{\text{espace entier}} (x - x^0)^i (y - y^0)^j \mathrm{P}(\vec{x}^0t^0, \vec{x}t)\, d\vec{x}} \to 1. \end{cases}$$

En effet le rapport (11) est alors équivalent à $\frac{(m^1_{abc})}{(m^1_{ij})}$, en désignant par m^1_{abc} et m^1_{ij} les moments calculés sur le volume $V(\varepsilon)$, et ce dernier rapport est inférieur en module à $\frac{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^6}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^5} = \varepsilon$, qui peut être pris arbitrairement petit.

Les conditions (12) reviennent à dire que si la position $M(x^0y^0z^0)$ est connue au temps t^0, des positions non infiniment proches de M au temps t deviennent d'une probabilité évanescente quand $t - t^0$ tend vers zéro.

b) *Variation temporelle de la probabilité liée.*

Par la relation (8) on a, compte tenu des hypothèses sur les dérivées de P :

$$
\begin{aligned}
(13)\quad P(\vec{x}^0t^0, \vec{x}t) &= \int P(\vec{x}^0t^0, \vec{\chi}\, t^0 + \Delta t^0)\, P(\vec{\chi}t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t)\, d\vec{\chi} \\
&= \int P(\vec{x}^0t^0, \vec{\chi}t^0 + \Delta t^0)\, d\vec{\chi} \Big\{ P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) \\
&+ (\chi_i - x_i^0)\, \frac{\partial}{dx_i^0} P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) \\
&+ \frac{1}{2}(\chi_i - x_i^0)(\chi_j - x_j^0)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) \\
&+ \frac{1}{6}(\chi_i - x_i^0)(\chi_j - x_j^0)(\chi_\rho - x_\rho^0)\, \frac{\partial^3 P(\vec{\Lambda}, t^0 + \Delta t^0, xt)}{\partial x_i^0 \partial x_j^0 \partial x_\rho^0} \Big\}
\end{aligned}
$$

(avec $\vec{\Lambda} = \vec{x}^0 + \theta(\vec{\chi} - x^0)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$).

Appelons N_{ijl} les bornes supérieures des dérivées troisièmes de P, qui peuvent être prises indépendantes de $t - t^0$, et remarquons que (2) s'écrit pour un processus de Markoff :

$$
(14)\qquad \int P(\vec{x}^0t^0, \vec{\chi}t^0 + \Delta t^0)\, d\vec{\chi} = 1.
$$

(13) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \frac{P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) - P(\vec{x}^0t^0, \vec{x}t)}{\Delta t^0} &= -\frac{m_i(\vec{x}^0t^0\Delta t^0)}{\Delta t^0}\, \frac{\partial}{\partial x^0} P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) \\
&- \frac{1}{2}\, \frac{m_{ij}(\vec{x}^0t^0\, \Delta t^0)}{\Delta t^0}\, \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} P(\vec{x}^0t^0 + \Delta t^0, \vec{x}t) \\
&- \frac{1}{6}\, \frac{m_{ijl}}{\Delta t^0}\, \Gamma_{ijl}(\vec{x}^0t^0\, xt)
\end{aligned}
$$

avec $|\Gamma_{ijl}| < N_{ijl}$.

c) *Étude du comportement des moments des trois premiers ordres.*

Donnons-nous 9 valeurs $t^{(1)}t^{(2)} \dots t^{(9)}$ de t, et constituons le déterminant (D) à 9×9 éléments

3 lignes $_{i=1,2,3}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^{(2)} t^{(2)}), \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x} t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)})$$

6 lignes (une pour chacune des combinaisons à répétition C_{ik})

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_k^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_k^0} P(\vec{x}^0 t^0, x^{(2)} t^{(2)}) \quad \dots, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_k^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}).$$

Montrons que si ce déterminant n'est pas identiquement nul en $\vec{x}^{(1)} \dots \vec{x}^{(9)}, t^{(1)} \dots t^{(9)}$ (pour t^0 et $\vec{x}^0$ fixes), tous les rapports de la forme $\frac{m_i^{(1)}}{\Delta t^0}$ et $\frac{(m_{ik}^{(1)})}{\Delta t^0}$, définis par (10) pour $\sigma = 1$ et $\sigma = 2$, tendent vers des limites finies $u_i(\vec{x}^0 t^0)$ et $k_{ij}(\vec{x}^0 t^0)$ quand $\Delta t^0 \to 0$.

Remarquons d'abord que, par la continuité des dérivées premières, le déterminant restera, si Δt^0 est assez petit, différent de zéro quand on remplace t^0 par $t^0 + \Delta t^0$.

Choisissons ensuite une combinaison (nq) de deux variables, et écrivons le système :

$$\lambda_1(\Delta t_0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}) + \cdots + \lambda_9(\Delta t_0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P[\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}] = 0.$$

$$\lambda_1(\Delta t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_n^0 \partial x_q^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}) + \cdots + \lambda_9(\Delta t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_n^0 \partial x_q^0} P[\vec{x}^0, t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}] = 1$$

$$\lambda_1(\Delta t_0) \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} (\vec{x}^0, t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}) + \cdots + \lambda_9(\Delta t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} P[\vec{x}^0, t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}] = 0$$

[(ij) étant toute autre combinaison que (nq)].

Ce système a une solution unique, donc les $\lambda_1(\Delta t_0) \dots \lambda_9(\Delta t_0)$ convergent, pour $\Delta t_0 \to 0$, vers $\lambda_1(0) \dots \lambda_9(0)$. Or on a par (15) :

$$(16) \quad \sum_{r=1}^{r=9} \lambda_r(\Delta t^0) \frac{P(\vec{x}^0, t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^r t^r) - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^r t^r)}{\Delta t^0} = -\frac{m_{(nq)}}{2\Delta t^0}(t_0^0, \vec{x}^0, \Delta t^0) - \sum_r \sum_{ijl} \lambda_r \frac{(m_{ijl})}{6\Delta t^0} C_{ijl}^r.$$

D'après (11) et (15) tous les termes du second membre sont infiniment petits devant le premier. Comme le premier membre tend vers $\sum_r \lambda_r(0) \frac{\partial P}{\partial t^0}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}^r t^r)$ on en déduit qu'il existe une limite pour $\frac{[m_{(nq)}]}{\Delta t^0}$, et ensuite que les rapports $\frac{(m_{ijl})}{\Delta t^0}$ tendent vers zéro.

Choisissons maintenant une valeur j et écrivons le système :

$$(17)\quad \begin{cases} (i \neq j) \quad \lambda_1'(\Delta t^0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(1)} t^{(1)}) + \cdots \\ \qquad\qquad + \lambda_9'(\Delta t^0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}) = 0, \\ \lambda_1'(\Delta t_0^0) \frac{\partial}{\partial x_j^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, x^{(1)} t^{(1)}) + \cdots \\ \qquad\qquad + \lambda_9'(\Delta t^0) \frac{\partial}{\partial x_j^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}) = 1, \\ \lambda_1'(\Delta t^0) \frac{\partial^2}{\partial x_a^0 \partial x_b^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, x^{(1)} t^{(1)}) + \cdots \\ \qquad\qquad + \lambda_9'(\Delta t^0) \frac{\partial^2}{\partial x_a^0 \partial x_b^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, \vec{x}^{(9)} t^{(9)}) = 0. \end{cases}$$

Ce système a aussi une solution unique, d'où la convergence des $\lambda_1', \ldots, \lambda_9'$ pour $\Delta t_0 \to 0$, et l'on a :

$$(18)\quad \sum_{r=1}^{r=9} \lambda_r'(\Delta t^0) \frac{P(\vec{x}^0 t^0 + \Delta t^0, x^r t^r) - P(\vec{x}^0 t_0, \vec{x}^r t^r)}{\Delta t^0} = -\frac{m_j}{\Delta t^0}(t^0 \vec{x}^0 \Delta t^0) - \sum_r \sum_{ijl} \lambda_2' \frac{(m_{ijl})}{6 \Delta t^0} C_{ijl}^r.$$

Les derniers termes tendant vers zéro pour $\Delta t^0 \to 0$, et le premier membre tendant vers $\sum_r \lambda_r'^0 \frac{\partial P}{\partial t^0}(\vec{x}^0 t_0, \vec{x}^r t^r)$, on en déduit l'existence d'une limite pour $\frac{m_j}{\Delta t^0}$.

3. Généralisation des processus de Markoff.

1. Nous venons d'établir que pour les processus de Markoff les rapports $\frac{m_i(\vec{t x t'})}{t' - t}$ et $\frac{[m_{ik}(\vec{t x t'})]}{t' - t}$ sont convergents quand $t' - t \to 0$, et que $\frac{[m_{ikl}(\vec{t x t'})]}{t' - t} \to 0$. Mais ces propriétés ne sont pas caractéristiques, et il y a intérêt à les prendre comme base pour définir un ensemble plus étendu de processus aléatoires.

Considérons un vecteur aléatoire continu $\vec{X}(t')$, défini par une loi de probabilité liée à une valeur connue $\vec{x}$ de $\vec{X}(t)$; nous supposerons :

α) qu'il existe des moments du premier ordre m_i (soit $\vec{m} = \overline{\vec{X}}$), dérivables par rapport au temps et aux composantes de $\vec{x}$;

β) que si l'on pose :

$$\vec{X}(t') = \overline{\vec{X}}(t') + \vec{X}'(t') \tag{19}$$

la variable aléatoire

$$\vec{B}(\ldots\vec{x}t, t') = \frac{\vec{X}'(t') - \vec{X}'(t)}{\sqrt{t' - t}} = \frac{\Delta\vec{X}'}{\sqrt{t' - t}} \tag{20}$$

a des moments du second ordre $\frac{m'_{ik}}{t' - t}$ convergents.

(Les points de suspension, — que nous omettrons désormais, signifient que les positions antérieures à t peuvent figurer dans $\vec{B}$) ;

γ) que la condition (11) est vérifiée pour les moments de $\Delta\vec{X}'$

Posons :

$$\vec{a}(\vec{x}tt') = \frac{\overline{\Delta\vec{X}}}{t' - t} = \frac{\overline{\vec{X}}(t') - \overline{\vec{X}}(t)}{t' - t}. \tag{21}$$

D'après l'hypothèse (α), $\vec{a}(\vec{x}tt')$ tend vers une limite $\vec{a}(\vec{x}tt)$ pour $t' - t \to 0$.

On écrira alors par (19), (20) et (21) :

$$\Delta\vec{X} = \overline{\Delta\vec{X}} + \Delta\vec{X}' = \vec{a}(\vec{x}tt')\,(t' - t) + \vec{B}(\vec{x}tt')\sqrt{t' - t} \tag{22}$$

où $\vec{a}$ est un vecteur certain, convergent pour $t' - t \to 0$, et $\vec{B}$ un vecteur aléatoire de valeur moyenne nulle, et dont les moments du second ordre sont convergents.

Remarquons que par l'hypothèse (γ), si l'on appelle m'_{ikl} les moments du troisième ordre de $\Delta\vec{X}'$, les rapports $\frac{m'_{ikl}}{t' - t}(\vec{x}tt')$ tendent vers zéro avec $t' - t$.

D'autre part les propriétés admises pour les moments de $\Delta\vec{X}'$ s'étendent aux moments de $\Delta\vec{X}$; on a en effet, puisque $\overline{B}_i = \overline{B}_j = 0$

$$\frac{\overline{(\Delta X_i)\,(\Delta X_j)}}{t' - t} = a_i(\vec{x}tt')\,a_j(\vec{x}tt')\,(t' - t) + \overline{B_i(\vec{x}tt')B_j(\vec{x}tt')}$$

et quand $t' \to t$ l'expression tend vers $\overline{B_i(\vec{x}tt)B_j(\vec{x}tt)}$, tout comme $\overline{\Delta X'_i \Delta X'_j}$.

De même, (S désignant le symbole de permutation circulaire),

$$\frac{\overline{\Delta X_i \Delta X_j \Delta X_l}}{t' - t} = a_i a_j a_l (t' - t)^2 + S_{ijl} a_i \overline{B_j B_l}(t' - t) + \overline{B_i B_j B_l}\sqrt{t' - t}$$

et tous les termes du second membre tendent vers zéro avec $t' - t$.

2. Dans ce qui précède $X(t)$ était supposé connu, et les moyennes étaient prises sur les valeurs $\vec{x}'$ de $\vec{X}(t')$. On peut obtenir une plus grande généralisation en écrivant une loi :

$$(23) \qquad \vec{X}(t') - \vec{X}(t) = \vec{A}(\ldots \vec{X} t t')\,(t' - t) + \vec{B}(\ldots \vec{X} t t')\sqrt{t' - t}$$

où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs aléatoires qui devront vérifier certaines conditions pour que la loi de probabilité de $\vec{X}$ satisfasse à l'équation de la diffusion valable pour les processus de Markoff. Ces conditions feront intervenir des moyennes prises sur l'ensemble conjugué des vecteurs $\vec{X}$, $\vec{A}$ et $\vec{B}$; nous les préciserons au chapitre suivant.

CHAPITRE II

L'ÉQUATION DE LA DIFFUSION POUR LES PROCESSUS DE MARKOFF ET LEUR GÉNÉRALISATION

D'après la propriété qui définit les processus de Markoff, la répartition des densités de probabilité au temps $t + dt$ ne dépend que de leur répartition au temps t. Il doit donc exister une équation différentielle qui relie la densité de probabilité à ses variations spatiales et temporelles, du premier ordre en t. C'est l'équation dite « de Fokker-Planck ». Nous allons l'établir pour les processus de Markoff, puis pour les processus plus généraux mentionnés au chapitre précédent.

1. Cas des processus de Markoff.

La fonction qui sera ici étudiée est la densité de probabilité $P(\vec{x}^0 t^0 \vec{x} t)$, liée à une position initiale $\vec{x}^0$ au temps t_0. L'équation qui définit la probabilité simple $\mathcal{P}(\vec{x} t)$ est de même forme, car il suffit de supposer connu $\vec{X}(t^0)$, pour que les deux grandeurs se confondent.

Par ailleurs il existe une autre équation différentielle, reliant P et ses dérivées par rapport aux variables initiales $\vec{x}^0 t^0$; comme elle se déduit aussitôt de (I-15), nous l'établirons en premier lieu.

A. Équation différentielle entre P et ses dérivées par rapport aux variables initiales.

Rappelons que nous avons posé :

$$\lim_{\Delta t^0 \to 0} \frac{m_i(\vec{x}^0 t^0 \Delta t^0)}{\Delta t^0} = u_i(\vec{x}^0 t^0), \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta t^0 \to 0} \frac{[m_{ij}(\vec{x}^0 t^0 \Delta t^0)]}{\Delta t^0} = k_{ij}(\vec{x}^0 t^0). \tag{2}$$

Quand $\Delta t^0 \to 0$, le premier membre de (I-15) tend vers $\frac{\partial}{\partial t_0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t)$; les dérivées premières et secondes de P ont été supposées continues; nous savons que le dernier terme du second membre tend verz zéro; on obtient donc l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t_0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + u_i(\vec{x}^0 t^0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + \frac{k_{ij}}{2} (\vec{x}^0 t^0) \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) = 0.$$

B. Équation différentielle entre P et ses dérivées par rapport aux variables finales.

1. — *Expression en fonction de* $\vec{u}$ *et* k_{ij} (démonstration de Kolmogoroff) [2].

Pour établir le comportement des moments nous avions supposé la continuité des dérivées de P jusqu'au troisième ordre; il nous faut maintenant supposer aussi continues les dérivées spatiales du quatrième ordre. Alors, par le système qui les définit, les $\lambda_r(0)$ et $\lambda_r'(0)$ ont des dérivées continues en $\vec{x}_0$ et t_0 jusqu'au second ordre; par I (16) et I (18) il en est de même pour les u_i et les k_{ij}.

Soit, pour t fixe, une région $(\mathcal{R})$ où le déterminant (D) ne soit pas identiquement nul. Soit $f(\vec{x})$ une fonction indépendante du temps, identiquement nulle à l'extérieur de $(\mathcal{R})$, non négative ni identiquement nulle à l'intérieur, ayant ses dérivées bornées jusqu'au troisième ordre. Cherchons une autre expression de l'intégrale :

$$(4) \quad \mathfrak{I} = \int_{\mathcal{R}} f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \, d\vec{x}.$$

On peut aussi écrire, en intégrant dans l'espace entier puisque f est identiquement nul hors de $(\mathcal{R})$:

$$\mathfrak{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int f(\vec{x}) P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \, d\vec{x} = \lim \frac{1}{\Delta t} \int f(\vec{x}) [P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}\, t + \Delta t) - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t)] \, d\vec{x}$$

soit, en appliquant la relation de Chapman (I, 8)

$$\mathfrak{I} = \lim \frac{1}{\Delta t} \left[\iint f(\vec{x}) \; P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}' t) P(\vec{x}' t, \vec{x}\, t + \Delta t) \, d\vec{x} \, d\vec{x}' - \int f(\vec{x}) P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \, d\vec{x} \right]$$

ou en développant $f(\vec{x})$ en fonction de $\vec{x} - \vec{x}'$:

$$(5)\quad \mathfrak{I} = \lim \frac{1}{\Delta t}\Big[\iint \mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)\mathrm{P}(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t)\, d\vec{x}d\vec{x}' \,[f(\vec{x}') + (\vec{x}_i - \vec{x}'_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}') + \frac{1}{2}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \frac{1}{6}(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_\varrho - x_\varrho)\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\varrho}(\xi)] - \int f(\vec{x}')\mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)\, d\vec{x}'.\Big]$$

Dans l'intégrale double les intégrations sur $\vec{x}$ donnent respectivement :

$$(6)\quad \frac{1}{\Delta t}\int \mathrm{P}(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t)\, d\vec{x} = \frac{1}{\Delta t},$$

$$(7)\quad \frac{1}{\Delta t}\int \mathrm{P}(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t)(x_i - x'_i)\, d\vec{x} = \frac{m_i}{\Delta t}(\vec{x}'t, \Delta t),$$

$$(8)\quad \frac{1}{\Delta t}\int \mathrm{P}(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t)(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)\, d\vec{x} = \frac{(m_{ij})}{\Delta t}(\vec{x}'t\Delta t).$$

$$(9)\quad \frac{1}{\Delta t}\int \mathrm{P}(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t)(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_\varrho - x_\varrho)\, d\vec{x} = \frac{(m_{ij_\varrho})}{\Delta t}(\vec{x}'t\ \Delta t).$$

Le terme (6) est annulé par le dernier terme de (5) ; quand Δt tend vers zéro, les termes (7), (8), (9) tendent respectivement vers $u_i(\vec{x}t)$, $k_{ij}(\vec{x}'\,t)$ et 0. On se trouve donc, en remontant à $\mathfrak{I}$, en présence des termes suivants

$$(10)\quad \int u_i(\vec{x}'t)\mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)\frac{\partial f}{\partial x'_i}(\vec{x}')d\vec{x}',$$

$$(11)\quad \frac{1}{2}\int k_{ij}(\vec{x}'t)\mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)\frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j}(\vec{x}')d\vec{x}'.$$

Le terme en $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x'_i \partial x'_j \partial x'_\varrho}$ est nul, car cette dernière quantité est bornée et se trouve multipliée par un facteur qui tend vers zéro.

On ne change pas ces intégrales en réduisant le domaine d'intégration à $(\mathcal{R})$. Si ensuite on intègre par parties, les intégrales sur la surface limite de $(\mathcal{R})$ sont nulles ; en opérant ainsi une fois sur (10) et deux fois sur (11) on obtient :

$$(10')\quad -\int_{\mathcal{R}} f(\vec{x}')\frac{\partial}{\partial x'_i}[\mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)u_i(\vec{x}'t)]\, d\vec{x}',$$

$$(11')\quad +\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} f(\vec{x}')\frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}[\mathrm{P}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)k_{ij}(\vec{x}'t)]\, d\vec{x}'.$$

Remplaçant $\vec{x}'$ par $\vec{x}$ dans les termes du second membre, portant dans (5) et égalant à (4), on trouve une expression de la forme :

$$\int_{\mathcal{R}} f(\vec{x}) Q(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t),$$

dont la nullité, en raison de l'arbitraire du choix de $f(\vec{x})$, impose $Q(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \equiv 0$; soit

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + \frac{\partial}{\partial x_i} [P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) u_i(\vec{x} t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) k_{ij}(\vec{x} t)] = 0.$$

Pour une position $\vec{X}^0(t_0)$ connue, P s'identifie avec la densité de probabilité simple $\rho(\vec{x} t)$, et l'on a l'équation de Fokker-Planck, qui prend une forme générale avec une fonction $\rho(\vec{x} t)$ dont on ne précise pas s'il s'agit d'une densité de probabilité simple ou liée :

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x} t) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)_{(\vec{x}, t)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\rho k_{ij}]_{(\vec{x} t)} = 0.$$

2. *Autre expression de l'équation de la diffusion.*

Cherchons à obtenir une équation équivalente à (12) par un procédé similaire à celui qui nous a conduits à l'équation (3); nous aurons à faire intervenir les moments en fonction des variables initiales :

$$\mu_i(\vec{x}^0 \vec{x} t) = \int P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \ (x_i^0 - x_i) d\vec{x}^0,$$

$$[\mu_{ij}(\vec{x}^0 \vec{x} t)] = \int P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) \ (x_i^0 - x_i) \ (x_j^0 - x_j) d\vec{x}^0,$$

$$[\mu_{ij\varrho}(\vec{x}^0 \vec{x} t)] = \int P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) (x_i^0 - x_i) (x_j^0 - x_j) (x_\varrho^0 - x_\varrho) d\vec{x}^0.$$

Nous définissons d'autre part :

$$\nu(t^0 \vec{x} \Delta t) = \int P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) d\vec{x}^0 - 1.$$

Nous supposerons une condition analogue à I (11)

$$(14) \qquad \frac{(\mu_{abc})}{(\mu_{ij})} \to 0 \quad \text{avec} \quad t - t_0.$$

Nous admettrons encore qu'il existe une région $(\mathcal{R})$ où l'un au moins des $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$, soit $\frac{\partial^2 p}{\partial x_n \partial x_q}$, a une borne inférieure N non nulle.

Cherchons à calculer:

$$(15) \qquad (J) = \frac{P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t + \Delta t) - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)}{\Delta t}.$$

Nous écrirons d'abord par la formule de Chapman:

$$(16) \quad P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t + \Delta t) = \int P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t)\, P(\vec{x}'t, \vec{x}t + \Delta t) d\vec{x}'.$$

puis :

$$(17) \quad P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}'t) = P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + (x_i' - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{2}(x_i' - x_i)(x_j' - x_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{6}(x_i' - x_i)(x_j' - x_r)(x_\varrho' - x_\varrho) \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\varrho} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{\zeta}t)$$

Par (14) on peut trouver Δt assez petit pour que, si petit que soit ε, on ait :

$$\frac{|(\mu_{ikl})|}{|\mu_{mq}|} < \varepsilon.$$

Soit N′ la plus grande des bornes supérieures des $\left|\frac{\partial^3 P}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\varrho}\right|$; on pourra écrire, dans $(\mathcal{R}_0)$ où

$$\left|\frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_q}\right| > N$$

$$\left|\frac{1}{6}\int \frac{\partial^3 P}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(\vec{x}^0 t_0, \vec{\xi}t)(x_i' - x_i)(x_j' - x_j)(x_l' - x_l)\, P(\vec{x}'t, \vec{x}t - \Delta t)\, d\vec{x}'\right|$$
$$< \frac{1}{6} N' |[\mu_{ijk}(t, \vec{x}, \Delta t)]| < \frac{\varepsilon}{6} N' |\mu_{nq}(t, \vec{x}, \Delta t)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{6} \frac{N'}{N} \left|\frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_q}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t + \Delta t)\right| \cdot |\mu_{nq}(t, \vec{x}', \Delta t).|$$

L'intégrale entre barres prend la forme :

$$K \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_q} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t + \Delta t)\ [\mu_{nq}(t\vec{x}\Delta t)] \qquad \text{avec} \qquad |K| < \frac{\varepsilon}{6} \frac{N'}{N}.$$

(J) s'écrit alors par (16) et (17) :

$$(18) \quad (J) = \frac{\nu(t, \vec{x}, \Delta t)}{\Delta t} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + \frac{\mu_i}{\Delta t}(t, \vec{x}, \Delta t) \frac{\partial}{\partial x_i} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\mu_{ij}}{\Delta t}(t, \vec{x}, \Delta t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{\mu_{nq}}{\Delta t}(t, \vec{x}, \Delta t) \frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_q}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) \left[\frac{1}{2} + \Sigma K\right]$$

avec $$|\Sigma K| < 10 \cdot \frac{\varepsilon}{6} \frac{N'}{N}.$$

L'expression (15) de (J) s'écrit encore :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + K'. \tag{19}$$

K' tendant vers zéro avec Δt.

En égalant (18) et (19), puis retranchant l'équation obtenue de (12), on obtient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} u_i(\vec{x}t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_{ij}(\vec{x}t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu(t, \vec{x}, \Delta t)}{\Delta t}\right] P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \left[u_i(\vec{x}t) - \frac{\partial}{\partial x_j} k_{ij}(\vec{x}t) + \frac{\mu_i(t\vec{x}\Delta t)}{\Delta t}\right] \frac{\partial}{\partial x_i} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[-k_{ij}(\vec{x}t) + \frac{\mu_{ij}}{\Delta t}(t\vec{x}\Delta t)\right] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[-k_{nq}(\vec{x}t) + \frac{\mu_{nq}}{\Delta t}(t\vec{x}\Delta t)\,(1 + 2\Sigma K)\right] \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_q} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) - K' = 0.$$

Fixons Δt, $\vec{x}$ et t; les coefficients de P, $\frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}$ deviennent des constantes, qui, si nous choisissons dix couples de valeurs pour $\vec{x}^0$ et t^0, se déterminent par un système linéaire. On pourra choisir les couples de valeurs en cause pour que le déterminant de ce système ne soit pas nul. Les solutions du système sont linéaires et homogènes par rapport aux dix valeurs correspondantes de K' et ne dépendent de Δt que par ces valeurs. On en déduit, K' tendant vers o avec Δt, que tous les coefficients tendent vers o; et comme de plus $K \to o$, on obtient :

$$\begin{cases} \mathfrak{V}(t\vec{x}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\nu(t, \vec{x}, \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} u_i(\vec{x}t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} k_{ij}(\vec{x}t) \\ \mathfrak{M}_i(t\vec{x}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\mu_i(t\vec{x}\Delta t)}{\Delta t} = -u_i(\vec{x}t) + \frac{\partial}{\partial x_j} k_{ij}(\vec{x}t) \\ \mathfrak{M}_{ij}(t\vec{x}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{[\mu_{ij}(t\vec{x}\Delta t)]}{\Delta t} = k_{ij}(\vec{x}t). \end{cases} \tag{20}$$

L'équation de la diffusion s'écrit en fonction des nouvelles grandeurs :

$$-\frac{\partial P}{\partial t}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + \mathfrak{M}_i(t\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_r} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{M}_{ij}(t\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + \mathfrak{V}(t\vec{x}) P(\vec{x}^0 t^0, xt) = o$$

ou :

$$(21)\quad -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}t) + \mathfrak{M}_i(t\vec{x})\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(\vec{x}t) + \frac{1}{2}\mathfrak{M}_{ij}(t\vec{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\rho(\vec{x}t) + \mathfrak{N}(t\vec{x})\rho(\vec{x}t) = 0.$$

Nota. — Le raisonnement ci-dessus est inspiré d'une suggestion de Kolmogoroff [2], proposée comme l'esquisse d'une nouvelle méthode pour établir l'équation (12). Kolmogoroff indique la marche qui conduit à (16), (17), (19) et (21), mais signale qu'il faudrait, par de difficiles raisonnements aux limites, prouver la convergence des $\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_{ij}$ et $\mathfrak{N}$, puis les identifier avec les expressions (20). Nous avons préféré supposer acquise l'équation (12), et en tirer (21); les conditions que nous avons admises pour la validité de (21) sont de même forme que les conditions de Kolmogoroff pour (12), mais non identiques.

2. Généralisation à certains processus non markoviens.

Nous allons montrer, en suivant différents auteurs [3], que l'équation de Fokker-Planck (13) s'applique à un ensemble plus général de fonctions définies par (I-23), les vecteurs aléatoires $\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant toutefois soumis à certaines restrictions, touchant des moyennes conjuguées de produits de la forme $\psi_A[\vec{x}(t)]\ \theta_A[\vec{A}(t')]$ ou

$$\psi_B[\vec{X}(t)]\ \theta_B[\vec{B}(t')]$$

Il est facile de voir qu'on obtient les mêmes valeurs en prenant les moyennes sur l'ensemble des trois vecteurs (X, A, B), ou sur l'ensemble des deux vecteurs intéressés (XA) ou (XB). Soient, en effet

$$\mathfrak{L}(\vec{x}t, \vec{a}, \vec{b}t'),\ R_A(\vec{x}t, \vec{a}t') \text{ et } R_B(\vec{x}t, \vec{b}t')$$

les densités de probabilités conjuguées de

$$[\vec{X}(t)\ \vec{A}(t')\ \vec{B}(t')],\qquad [\vec{X}(t)\ \vec{A}(t')],\qquad [\vec{X}(t)\ \vec{B}(t')]$$

($\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ valeurs possibles pour les trois vecteurs $\vec{X}$, $\vec{A}$, $\vec{B}$) on a : par (I-5) :

$$\int \mathfrak{L}(\vec{x}t, \vec{a}\vec{b}t')\ \psi_A(\vec{x})\ \theta_A(\vec{a})d\vec{x}d\vec{a}d\vec{b} = \int \psi_A(\vec{x})\ \theta_A(\vec{a})d\vec{x}d\vec{a}\int \mathfrak{L}(\vec{x}t\vec{a}\vec{b}t')d\vec{b}$$
$$= \int \psi_A(\vec{x})\ \theta_A(\vec{a})R_A(\vec{x}t, \vec{a}t')\ d\vec{x}d\vec{a}$$

et de même :

$$\int \mathfrak{L}(\vec{x}t, \vec{a}bt')\,\psi_B(\vec{x})\,\theta_B(\vec{b})d\vec{x}d\vec{a}d\vec{b} = \int \psi_B(\vec{x})\,\theta_B(\vec{b})\,R_b(\vec{x}t\vec{b}t')d\vec{x}d\vec{b}.$$

Ceci précisé, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ devront, pour toute fonction $\Phi(\vec{X})$, satisfaire aux conditions suivantes, les barres désignant les moyennes conjuguées:

1°) (21 *bis*) $$\overline{B_i\Phi(\vec{X})} = 0.$$

En particulier $\overline{B_i} = 0$. Cette dernière condition entraîne la première si $\vec{B}$ et $\vec{X}$ sont indépendants.

2°) $\overline{A_i(t)\Phi[\vec{X}(t)]}$ et $\overline{B_i(t')B_j(t')\Phi[\vec{X}(t)]}$ sont uniformément convergents quand $t' \to t$.

Soit $\rho(\vec{x}t)$ la densité de probabilité simple (ou liée à une valeur antérieure indifférente) de la valeur $\vec{x}$ de $\vec{X}$, et soient

$$P_A[\vec{a}(t')/\vec{x}(t)] \qquad \text{et} \qquad P_B[\vec{b}(t')/\vec{x}(t)]$$

les densités de probabilités liées; on a par (I-3) :

(22) $$R_A(\vec{x}t, \vec{a}t') = \rho(\vec{x}t)P_A[\vec{a}(t')/\vec{x}(t)],$$

(23) $$R_B(\vec{x}t\vec{b}t') = \rho(\vec{x}t)P_B[\vec{b}(t')/\vec{x}(t)].$$

Soient enfin α_i et β_{ij} les moyennes liées :

(24) $$\alpha_i(\vec{x}tt') = \int a_i P_A[\vec{a}(t')/\vec{x}(t)]d\vec{a},$$

(25) $$\beta^2_{ij}(\vec{x}tt') = \int b_i b_j P_B[\vec{b}(t')/\vec{x}(t)]d\vec{b}.$$

On déduit de (22) et (23) :

(26) $$\overline{A_i(t')\Phi[\vec{X}(t)]} = \int \Phi(\vec{x})\rho(\vec{x}t)\alpha_i(\vec{x}tt')\,d\vec{x},$$

(27) $$\overline{B_i(t')B_j(t')\Phi[\vec{X}(t)]} = \int \Phi(\vec{x})\rho(\vec{x}t)\beta_{ij}(\vec{x}tt')\,d\vec{x}.$$

On a par ailleurs, avec la même polyvalence dans la désignation des moyennes :

(28) $$\overline{\Phi(\vec{x})} = \int \Phi(\vec{x})\rho(\vec{x}t)d\vec{x}.$$

Prenons une fonction $U(\vec{X})$ continue et pourvue de dérivées continues jusqu'au troisième ordre, les dérivées du troisième ordre

étant uniformément bornées, et U nulle à l'infini. Écrivons [avec

$$\Delta\vec{X} = \vec{X}(t') - \vec{X}(t)]$$

$$U[\vec{X}(t')] = U[\vec{X}(t)] + \Delta X_i \frac{\partial}{\partial x_i}[U[\vec{X}(t)]] + \frac{1}{2}\Delta X_i \Delta X_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[U[\vec{X}(t)]]$$
$$+ \frac{1}{6}\Delta X_i \Delta X_j \Delta X_l \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}[U(\vec{X} + \underset{(0<\lambda<1)}{\lambda}\Delta\vec{X})].$$

En remplaçant $\Delta\vec{X}$ par son expression (I-23), et prenant les moyennes sur $(\vec{X}, \vec{A}, \vec{B})$ on trouve par (21 *bis*) :

$$(29)\quad \overline{\frac{U[\vec{X}(t')] - U[\vec{X}(t)]}{t' - t}} = \overline{A_i(t')\frac{\partial}{\partial x_i}U[\vec{X}(t)]} + \overline{\frac{B_i(t')B_j(t')}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U[\vec{X}(t)]}.$$

Par (28) le premier membre devient

$$\frac{1}{t' - t}\left\{(t' - t)\int \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}t)U[\vec{X}(t)]\,d\vec{x} + o(t' - t)\right\}$$

et par (26) et (27) on obtient :

$$\int d\vec{x}\left\{U[\vec{X}(t)]\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}t) - \rho(\vec{x}t)\frac{\partial}{\partial x_i}U(\vec{x}t)\alpha_i(\vec{x}tt') - \rho(\vec{x}t)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}t)\beta_{ij}(\vec{x}tt') + o(t' - t)\right\} = 0.$$

Quand $\Delta t \to 0$, en raison des hypothèses de convergence, α_i et β_{ij} tendent vers des limites u_i et k_{ij}; on obtient alors en intégrant par parties, les intégrales de surface étant nulles à l'infini comme U :

$$\int U(\vec{x}t)\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}t) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)_{(\vec{x}t)} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho k_{ij})_{(\vec{x}t)}\right]d\vec{x} = 0.$$

ce qui, $\vec{U}$ étant arbitraire, donne l'équation de Fokker-Planck.

Remarque. — Si les conditions de continuité et de limites n'étaient vérifiées que dans une région finie, il suffirait, comme dans la section précédente, de choisir U identiquement nul à partir de la surface qui limite cette région.

3. Les applications physiques des processus stochastiques.

La première application importante des processus stochastiques à l'explication de phénomènes physiques a été la théorie cinétique des gaz. Mais une grande partie de cette théorie étudie les propriétés

globales du gaz (répartition des vitesses, température, pression, entropie). Nous bornerons notre analyse aux processus de diffusion, qui concernent le comportement local.

A. Propagation de la chaleur.

L'équation de propagation de la chaleur dans un corps homogène, due à Fourier, s'établit avec plus de généralité pour une grandeur physique arbitraire soumise aux seules conditions suivantes :

1) Elle est répartie d'une manière continue dans une région de l'espace.

2) Dans cette région, le flux de la grandeur à travers un élément de surface dans l'unité de temps est proportionnel au gradient de la densité φ de la grandeur considérée, pris suivant la normale (n) à la surface.

On a alors dans tout volume (V) limité par une surface (S)

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dv = k \int_S \frac{d\varphi}{dn}\, dS = k \int_V \Delta\varphi\, dv$$

D'où :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k\Delta\varphi.$$

La chaleur est du type considéré, si l'on admet que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température, et que la température absolue est elle-même proportionnelle à la densité d'énergie calorifique.

La solution générale de l'équation, dans le cas d'un milieu infini, est :

$$\varphi(\vec{x}t) = \left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{x}^0, 0) \exp - \frac{(\vec{x} - \vec{x}^0)^2}{4kt}\, d\vec{x}_0$$

L'apparition de la loi de Gauss donne l'idée de considérer le transfert de la chaleur comme l'effet résultant d'un nombre infini de diffusions aléatoires issues de chaque point du fluide, l'écart quadratique variant comme la racine de la durée.

B. La diffusion dans la théorie cinétique des gaz.

Les molécules d'un gaz sont, dans les conditions ordinaires, un libre parcours moyen de l'ordre de 10^{-5} cm, et subissent 10^{10} chocs par seconde. On admet, en première approximation, que les libres

parcours sont indépendants. Ceci n'est pas strictement vrai, car la vitesse d'une molécule après le choc a en moyenne une composante positive dans la direction de la vitesse antérieure au choc; on tient compte de ce fait en majorant légèrement les longueurs du libre parcours réel, ce qui permet de maintenir l'hypothèse de l'indépendance.

Considérons les projections des composantes des déplacements sur un axe; la variation de l'abscisse depuis une position initiale connue jusqu'au $n^{ième}$ choc est une variable aléatoire :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

X_1X_2 etc... étant les variables aléatoires représentant les déplacements $\xi_1\xi_2$ etc... entre deux chocs. On supposera qu'elles ont le même écart quadratique η; c'est-à-dire que pour chaque processus, si $p(\xi)d\xi$ est la probabilité de présence dans la longueur $d\xi$

$$\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_i^2 p(\xi_i) d\xi_i.$$

Cherchons l'écart quadratique (ou « dispersion ») de $X_1 + X_2$; son carré est :

$$\overline{(X_1 + X_2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 + \xi_2)^2 p(\xi_i (p(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

La fonction $p(\xi)$ étant supposée paire, on a $\overline{X}_1 = \overline{X}_2 = 0$, d'où par (I, 5 bis) :

$$\overline{(X_1 + X_2)^2} = 2\eta^2$$

et par récurrence :

$$\overline{X^2} = n\eta^2.$$

D'autre part si Θ est la durée moyenne du libre parcours, on a : $\eta = \frac{t}{\Theta}$; on trouve donc, comme pour les solutions de l'équation de la chaleur, un écart quadratique variant comme la racine de la durée.

On démontre d'ailleurs (théorème de Liapounoff) [4] que si on ajoute n variables aléatoires indépendantes quelconques, et si on suppose :

1° que la dispersion de la somme devient infinie avec n;

2° que les dispersions de chaque terme restent petites devant celle de la somme (1),

la loi de probabilité pour la somme est la loi de Gauss.

Elle s'applique donc au processus de diffusion des gaz défini ci-dessus, les deux conditions étant évidemment vérifiées.

La loi de probabilité pour l'ensemble des trois coordonnées, supposées indépendantes, est le produit des lois relatives à chacune, ce qui redonne la loi de Gauss à trois variables.

---

(1) D'une manière plus précise, soit ε un nombre arbitrairement petit; il faut que la somme des carrés des moyennes quadratiques des X_k, prises sur l'ensemble des valeurs supérieures à εs_n, soit infiniment petit devant s_n^2.

CHAPITRE III

LES CARACTÈRES D'UN FLUIDE DE TYPE BROWNIEN. LA NOTION DE SEUIL DE LA DIFFUSION

1. Définition et caractères du fluide brownien.

A. Le fluide brownien d'Einstein.

Le mouvement brownien s'étant imposé à la suite de constatations expérimentales, sa définition mathématique est assez conventionnelle.

Einstein, étudiant le mouvement irrégulier des particules en suspension dans un liquide [5], définit la diffusion autour d'un point par des hypothèses concernant le mouvement à une dimension, mais qui peuvent être transposées comme suit dans l'espace à trois dimensions :

1° Considérons N particules se trouvant au temps t autour d'un point (xyz). Le nombre dN de ces particules qui sera passé au temps $t + \tau$ dans un volume $d\vec{\xi}$ entourant le point $M(\vec{x} + \vec{\xi})$ est de la forme

$$dN = N\varphi(\vec{\xi}, \tau)\ d\vec{\xi} \tag{1}$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{\xi},\tau) d\vec{\xi} = 1.$$

2° La fonction φ est paire, et ne diffère de zéro que pour de petites valeurs de $\vec{x}' - \vec{x}$.

3° Quand τ tend vers zéro, les trois quantités :

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_i^2 \varphi(\vec{\xi}, \tau) d\vec{\xi}$$

($i = 1, 2, 3$, intégrales prises dans l'espace entier) tendent vers la même limite k, et les moments d'ordre supérieur au second sont tous des infiniment petits en τ d'ordre supérieur au premier.

La parité de la fonction φ entraîne par ailleurs :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_i \varphi(\vec{\xi}\tau) d\vec{\xi} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_i \xi_j \varphi(\vec{\xi}\tau) d\vec{\xi} = 0.$$

Soit alors $f(\vec{x}t)$ la densité des particules; écrivons que le nombre $f(\vec{x}, t+\tau)$ de celles se trouvant dans un volume choisi $d\vec{x}$ au temps $t+\tau$, est la somme des contributions venues de tous les volumes élémentaires de l'espace (y compris le volume $d\vec{x}$ lui-même) celles-ci étant données par la formule (1). On aura :

$$f(\vec{x}, t+\tau) d\vec{x} = d\vec{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x} + \vec{\xi}, t) \varphi(\vec{\xi}\tau) d\vec{\xi}.$$

En développant on obtient :

$$f(\vec{x}, t+\tau) = f(\vec{x}t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}t) + O \times \tau,$$

$$f(\vec{x} + \vec{\xi}, t) = f(\vec{x}t) + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}t) + \sum_i \xi_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}t) + \sum_{ij} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}t).$$

En intégrant par parties, une fois pour les termes du premier degré en ξ_i, et deux fois pour les termes du second degré, les intégrales de surface s'annulent, et l'on trouve :

$$f + \tau \frac{\partial f}{\partial t} + O \times \tau = f + \frac{k\tau}{2} \Delta f + o \times \tau$$

f est donc régi par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k}{2} \Delta f$$

et la dispersion est encore proportionnelle à la racine de la durée.

Remarque. — Reportons-nous à la formule (1). On voit que si N et δN sont assez grands pour que la probabilité se confonde avec la fréquence relative, $\frac{\delta N}{N}$ représentera la densité de probabilité de présence, d'une particule dans le volume $d\vec{v}'$ à l'instant t', liée à sa présence au point $\vec{x}$ au temps t. Cette densité de probabilité s'exprime par la fonction $\varphi(\vec{x}t, \vec{x}'t')$, qui ne dépend que de la position initiale, ce qui caractérise un processus de Markoff.

Les coordonnées xyz à un même instant sont aussi des variables

mutuellement indépendantes, et la probabilité d'une position est le produit des probabilités de chaque coordonnée.

Par application du théorème de Liapounoff, on peut se représenter la loi de Gauss comme résultant de la composition d'un nombre infiniment grand de processus élémentaires de dispersions très petites, ce qui correspond physiquement à la composition d'un nombre infiniment grand de chocs infiniment rapprochés.

Ainsi considéré, un élément brownien n'a plus ni libre parcours ni vitesse. Il peut parcourir une longueur infinie dans un temps fini, puisqu'à partir d'une position connue il y a une probabilité non nulle de le trouver en un point quelconque, si petite que soit la durée. Chacune de ses coordonnées est une fonction sans dérivée, ayant dans tout intervalle une infinité de maxima et de minima.

B. Définition plus générale du fluide de type brownien.

Les fluides stochastiques qui désormais seront considérés ici ne sont plus nécessairement régis par une loi markovienne; nous leur imposerons seulement les conditions suivantes :

a) Il existe en tout point et à tout instant une grandeur vectorielle $\vec{u}$ définie par

$$(2) \qquad \vec{u} = \lim \frac{1}{t' - t} \int (\vec{x}' - \vec{x}) \mathrm{P}[\vec{x}', t' / \vec{x}(t) = \vec{x}] \, d\vec{x}'$$

P étant la probabilité liée, avec :

$$(3) \qquad \int \mathrm{P}[\vec{x}' t' / \vec{x}(t) = \vec{x}] \, d\vec{x}' = 1$$

b) On a en tout point :

$$(4) \quad \lim \frac{1}{t' - t} \int (x_i' - x_i)(x_j' - x_j) \mathrm{P}[\vec{x}' t' / \vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}] \, d\vec{x}' = k_{ij}$$

avec $$k_{ij} = k\delta_{ij}.$$

k étant une constante, qui sera nommée « constante de diffusion ».

La forme des k_{ij} signifie que la diffusion est homogène et isotrope.

La dispersion au temps t' est égale à $\sqrt{k(t' - t)}$.

c) En tout point les quantités

$$(5) \quad \frac{1}{t' - t} \int (x_i' - x_i)(x_j' - x_j)(x_l' - x_l) \mathrm{P}[\vec{x}' t' / \vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}]$$

tendent vers zéro avec $t' - t$.

d) Le fluide obéit à l'équation de Fokker-Planck. Cette condition est d'ailleurs une conséquence des trois précédentes, moyennant certaines sujétions de continuité et de finitude (voir chap. II, sect. II).

Il pourra être commode, ayant d'abord défini les u_i par (2), de définir des variables aléatoires $\xi_i(\vec{x}t\vec{x}'t')$ par les relations :

$$x'_i = x_i + u_i(\vec{x}t)\ (t' - t) + \xi_i(\vec{x}t, \vec{x}'t') \tag{6}$$

Les ξ_i satisferont alors à :

$$\lim_{t' \to t} \frac{1}{t' - t} \int \xi_i(\vec{x}t, \vec{x}'t') \mathrm{P}[\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}] d\vec{x}' = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{t' \to t} \frac{1}{t' - t} \int \xi_i(\vec{x}t, \vec{x}'t')\ \xi_j(\vec{x}t, \vec{x}'t')\ \mathrm{P}[\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}] d\vec{x}' = k\delta_{ij}, \tag{8}$$

$$\lim_{t' \to t} \frac{1}{t' - t} \int \xi_i(\vec{x}t, \vec{x}'t')\ \xi_j[(\vec{x}t, \vec{x}'t')\ \xi_\rho(\vec{x}t, \vec{x}'t') \mathrm{P}[\vec{x}'t'|\vec{x}(t) = \vec{x}]\ d\vec{x}' = 0. \tag{9}$$

C. Grandeurs cinétiques représentatives du mouvement moyen du fluide stochastique [6].

a) *Vitesse.*

L'élément brownien n'a pas de vitesse, mais la relation (2) définit une vitesse fictive qui représente schématiquement le mouvement moyen du fluide. On peut en prendre conscience en établissant une formule qui donne la variation moyenne d'une grandeur $\mathrm{F}(\vec{x}t)$ liée à un élément.

Supposons F pourvue de dérivées continues jusqu'au troisième ordre, les dérivées du troisième ordre étant uniformément bornées.

Au temps t, la probabilité de la position $\vec{x}$ étant $\rho(\vec{x}t)$, la valeur moyenne de F est

$$\mathrm{F}_{\mathrm{M}}(t) = \int \rho(\vec{x}t)\, \mathrm{F}(\vec{x}t) d\vec{x}$$

Au temps t', la densité de probabilité du déplacement de $\vec{x}$ à $\vec{x}'$ étant $\mathrm{P}(\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x})$, on aura une valeur moyenne

$$\mathrm{F}_{\mathcal{M}}(t') = \int \rho(\vec{x}t) d\vec{x} \int \mathrm{P}[\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}]\, \mathrm{F}(\vec{x}'t') d\vec{x}.$$

Nous avons employé les désignations différentes F_{M} et $\mathrm{F}_{\mathcal{M}}$, car il ne s'agit pas mathématiquement de la même fonction, les lois de probabilité n'étant pas identiques.

Écrivons :

$$F(\vec{x}'t') = F(\vec{x}'t) + (t' - t)\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{x}'t) + O\times(t' - t),$$

$$F(\vec{x}'t) = F(\vec{x}t) + (x_i' - x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}F(\vec{x}t) + \frac{1}{2}(x_i' - x_i)\,(x_j' - x_j)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}F(\vec{x}t)$$
$$+ \frac{1}{6}(x_i' - x_i)\,(x_j' - x_j)\,(x_\varrho' - x_\varrho)\frac{\partial^3}{\partial x_i dx_j dx_\varrho}F(\vec{\chi}t).$$

Passons à la limite : $t' - t \to 0$; par (2), (3), (4) et (5), on a :

$$(10)\quad \lim_{t'\to t}\frac{1}{t' - t}[F_{\mathfrak{M}}(t') - F_M(t)] = \int \rho(\vec{x}t)\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(\vec{x}t)\right.$$
$$\left. + u_i(\vec{x}t)\frac{\partial}{\partial x_i}F(\vec{x}t) + \frac{1}{2}k_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}F(\vec{x}t)\right\}d\vec{x}.$$

formule générale où l'on remplacera k_{ij} par $k\delta_{ij}$ pour une diffusion homogène et isotrope.

Prenons $F = x_i$; le deuxième membre se réduit à :

$$\int \rho(\vec{x}t)u_i(\vec{x}t)\,d\vec{x}$$

Le vecteur $\vec{u}$ défini en chaque point du fluide a donc la propriété que sa valeur moyenne spatiale est égale à la limite du rapport

$$\frac{\vec{x}_{\mathfrak{M}}(t') - \vec{x}_M(t)}{t' - t}, \quad \text{quand} \quad t' \to t.$$

Si le fluide se réduit à un globule aléatoire, on pourra associer au globule un point fictif animé de la vitesse $\vec{u}$, dont le déplacement donnera une représentation schématique de la variation temporelle de la position moyenne du mobile aléatoire.

Notons cette particularité, qui nous servira : *dans un intervalle de temps infinitésimal, le mouvement moyen, (proportionnel à $t' - t$) est négligeable devant la diffusion (proportionnelle à $\sqrt{t' - t}$).*

b) *Accélération.*

On peut de même chercher à définir une grandeur assimilable à une accélération moyenne, en prenant pour F la vitesse $\vec{u}(xt)$, et l'on a

$$(11)\quad \lim_{t'\to t}\frac{1}{t' - t'}\left\{\vec{u}_{\mathfrak{M}}(t') - \vec{u}_M(t)\right\}$$
$$= \int\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + u_i\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}k\Delta\vec{u}\right)\rho(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Le vecteur :

$$\vec{A} = \frac{du}{\partial t} + u_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} k \Delta \vec{u} \qquad (12)$$

a la valeur d'une accélération moyenne si le processus est markovien, car alors si on se donne deux variations de temps successives $t' - t$ et $t'' - t'$, la loi du passage de $\vec{X}(t')$ à $\vec{X}(t'')$ est la même que la loi de passage de $\vec{X}(t)$ à $\vec{X}(t')$, et le déplacement moyen dans le deuxième intervalle peut encore être représenté à l'aide de la fonction $\vec{u}(t')$. Mais si le processus n'est pas markovien, c'est la loi de probabilité à trois variables $\vec{X}(t)\vec{X}(t')\vec{X}(t'')$ qui intervient, et $\vec{u}(t')$ ne définit plus le second déplacement; l'étude montre alors qu'il convient d'ajouter à l'expression (12) de A un terme complémentaire $\bar{\gamma}(\vec{x}t)$, nul en valeur moyenne.

2. La notion de seuil de la diffusion.

1. Nous avons vu que le mouvement brownien élimine les concepts de vitesse individuelle et de libre parcours, le nombre des chocs par unité de temps étant infini. Ceci veut dire qu'au regard des phénomènes étudiés le temps θ du libre parcours est négligeable. Autrement dit, la représentation brownienne du fluide et la représentation cinétique où les éléments ont une vitesse libre, une longueur et une durée de libre parcours, ne se placent pas à la même échelle. Il existe donc un seuil d'application des lois de la diffusion; au-dessous de ce seuil c'est la représentation cinétique qui devient valable.

Cherchons à établir le raccord entre les deux représentations : donnons-nous la vitesse moyenne σ_0 des éléments libres, la longueur Λ et la durée θ du libre parcours, et en fonction de ces données efforçons-nous de définir le seuil.

2. Supposons d'abord nul le déplacement d'ensemble $\vec{u}$. La diffusion pure que nous étudions, à partir d'une position donnée M de coordonnées $\vec{x}$ au temps t, est définie à chaque instant t' par sa dispersion $\Delta = \sqrt{k(t' - t)}$. Sur chaque demi-droite issue de M, la longueur Δ donne une représentation schématique de l'évolution probable de l'élément entre t et t'. Dans l'espace, la sphère de centre M et de rayon Δ donne une image de la dispersion isotrope à chaque instant.

Cette sphère a une vitesse d'expansion radiale

$$\sigma = \frac{\Delta}{t' - t} = \sqrt{\frac{k}{t' - t}}. \tag{13}$$

Quand $t' - t$ est infiniment petit, cette vitesse est infinie. Ceci nous confirme que pour les très petites valeurs de $t' - t$ les lois de la diffusion ne sont pas applicables : si en effet la répartition des vitesses est sensiblement homogène, et si l'élément est lancé initialement dans une direction par un choc, il est impossible que les chocs ultérieurs lui fassent parcourir dans cette direction plus de chemin que s'il avait conservé sa vitesse initiale.

Il paraît donc naturel de considérer que les lois de la diffusion commencent à s'appliquer au moment où la vitesse d'expansion brownienne σ devient de l'ordre de grandeur de la vitesse σ_0 des éléments libres.

On est même incité à fixer, plus précisément, le seuil au moment où ces vitesses sont égales. Car on passera ainsi d'un régime à l'autre sans discontinuité de la vitesse d'expansion radiale. Au-dessous du seuil l'expansion est uniforme avec la vitesse σ_0; au passage du seuil la formule (13) devient applicable avec une valeur initiale σ_0 pour σ.

Comme le seuil définit la fin du régime de propagation libre, on admettra conventionnellement que la durée moyenne θ du parcours libre est celle écoulée jusqu'au passage du seuil; on a alors par (13) où $\sigma = \sigma_0$

$$\theta = \frac{k}{\sigma_0^2} \tag{14}$$

et pour la longueur Λ du libre parcours :

$$\Lambda = \theta\sigma_0 = \frac{k}{\sigma_0} \tag{15}$$

Λ représente ainsi le rayon de la sphère d'expansion au passage du seuil.

Dans le cadre des lois browniennes, l'intervalle de temps θ et l'intervalle de longueur Λ sont considérés comme infiniment petits. On peut dire, inversement, que la considération du seuil de la diffusion introduit sur les localisations dans l'espace et dans le temps des incertitudes respectivement égales à Λ et θ, ces deux grandeurs prenant le sens de constantes minimales pour les longueurs et les durées.

3. Passons au cas où u n'est plus nul. Nous avons remarqué que dans un intervalle de temps infiniment petit, le déplacement d'ensemble

(d'ordre 1) est négligeable devant la dispersion $\left(\text{d'ordre } \frac{1}{2}\right)$. La description précédente peut alors être maintenue : en particulier le centre de la sphère d'expansion est resté pratiquement immobile au moment du passage du seuil.

Mais ceci suppose que θ puisse être considéré comme infiniment petit à l'échelle de la translation; c'est-à-dire que le déplacement $u\theta$ pendant le temps θ soit faible devant l'expansion $\sigma_0\theta$; d'où la condition

$$u \ll \sigma_0. \tag{16}$$

Et nous pressentons que pour des mouvements de translation rapides certaines conceptions de base touchant la diffusion pourraient donner lieu à révision.

Ajoutons cette remarque : nous avons vu que dans le cadre des lois de la diffusion le mobile peut avoir parcouru une distance infinie dans un temps fini; or cette éventualité est celle où l'influence retardatrice des chocs est négligeable. D'où cette conclusion : *l'approximation de la théorie classique de la diffusion est celle où la vitesse de parcours libre est infinie.*

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE SANS INTERVENTION DU SPIN

CHAPITRE IV

POSITION DU PROBLÈME - TRAVAUX ANTÉRIEURS

1. Position du problème.

Nous avons dit à l'Introduction ce qui incite à penser que des processus stochastiques pourraient servir de base à la mécanique quantique. Or celle-ci introduit un fluide fictif qui présente des analogies hydrodynamiques; il est naturel de tenter de rapprocher ce fluide d'un fluide de type brownien.

Mais tandis que le fluide quantique est conservatif, le fluide brownien ne l'est pas, si on associe la densité de probabilité ρ (ou la densité réelle qui lui est proportionnelle) et la vitesse moyenne $\vec{u}$; il apparaît en effet sur l'équation de Fokker-Planck (dans le cas auquel nous nous limitons, d'une diffusion homogène et isotrope) un terme complémentaire $-\frac{k}{2}\Delta\rho$. Dans un problème concret ρ sera nul à l'infini; $\Delta\rho$ ne peut alors être nul en tout point et à tout instant, car l'équation $\Delta\rho = 0$ définit une fonction harmonique qui est identiquement nulle si elle est nulle à l'infini.

Ce caractère non conservatif est d'ailleurs explicable : l'équation de continuité traduit la conservation de la masse d'un groupe déterminé de particules quand on suit leurs lignes de courant. Mais le courant $\vec{u}$ n'est qu'un courant moyen, et par la diffusion des éléments échappent à ce courant.

On peut néanmoins assimiler l'équation de la diffusion à une équation de conservation; il suffit de poser, avec M. Fenyes [7];

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{k}{2\rho}\vec{\nabla}\rho \tag{1}$$

et l'équation de Fokker-Planck qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) - \frac{k}{2}\Delta\rho = 0 \tag{2}$$

devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \tag{3}$$

On est donc incité à identifier $\vec{v}$ à la vitesse du fluide quantique, $\vec{u}$ devenant alors la vitesse moyenne du fluide brownien associé.

Ce qui différencie un fluide quantique d'un fluide ordinaire peut s'exprimer par l'existence d'un potentiel quantique $-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ qui s'ajoute au potentiel extérieur. Il est naturel d'imaginer qu'il s'agisse d'un terme parasite qui disparaîtrait si l'on remplaçait d'une manière convenable, $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$ dans certaines relations de la mécanique quantique. Le potentiel quantique serait alors un pseudo-potentiel résultant de l'emploi de la pseudo-vitesse $\vec{v}$. Nous développerons ce point de vue au chapitre suivant.

Nous allons d'abord rappeler les travaux de MM. Fenyes et Régnier, qui ont tous deux utilisé l'équation (1).

2. Les travaux de M. Fenyes [7].

Le terme complémentaire de (1) s'écrivant : $-\frac{k}{2}\vec{\nabla}\log\rho$, si $\vec{u}$ dérive d'un potentiel il en sera de même pour $\vec{v}$, et réciproquement. M. Fenyes a cherché à retrouver l'équation de Schrödinger, où le fluide quantique est irrotationnel; il définit donc pour $\vec{u}$ un potentiel des vitesses $\frac{S}{m_0}$, tel que :

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{S}{m_0}\right) \tag{4}$$

et d'une manière analogue une fonction σ telle que

$$-\frac{k}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sigma}{m_0}\right) \tag{5}$$

soit

$$\rho=\alpha^2\exp\left(-\frac{2\sigma}{m_0k}\right).$$

On a alors

$$v_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Sigma}{m_0}\right),\qquad\text{avec}\qquad\Sigma=S+\sigma. \tag{6}$$

Si l'on pose :

$$\psi=\alpha\exp\left(-\frac{\sigma}{m_0k}\right)\exp\left(-\frac{i}{m_0k}\Sigma\right)$$

la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi+\frac{k}{2i}\operatorname{div}\left[\psi\vec{\nabla}\psi^*-\psi^*\vec{\nabla}\psi\right]=0$$

est identique à (2) ou à (3).

M. Fenyes admet qu'il convient de poser :

$$k=\frac{\hbar}{m_0}.$$

Puis, pour retrouver l'équation de Schrödinger, il prend un lagrangien :

$$\mathfrak{L}=\int\left[\rho\frac{\partial\Sigma}{\partial t}+\frac{\rho}{2m_0}(\vec{\nabla}\Sigma)^2+U+\pi\right]d\vec{x}$$

Π étant une énergie de pression :

$$\Pi=\frac{m_0k^2}{8}\left(\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}\right)^2.$$

Le sens physique de cette énergie n'apparaissant pas, nous n'insisterons pas sur la démonstration.

3. Les travaux de M. Régnier [6].

M. Régnier calcule la quantité :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial_j v_i}{\partial x_j}$$

ce qui donne par (1) et (2) :

$$(7)\quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{k}{2}\Delta u_i - \frac{k^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Delta\sqrt{\rho}\right) + \frac{k}{2\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right].$$

Le dernier terme est nul si $\vec{u}$ est un gradient.

On voit bien apparaître la force dérivée du potentiel quantique, mais avec le signe opposé.

On constate le même fait si l'on écrit l'équation de Jacobi de la mécanique quantique [on a posé $\psi = \rho \exp\left(-i\frac{\varphi}{\hbar}\right)$]; son expression est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0$$

tandis que si l'on porte (6) dans (7) on trouve :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla}\Sigma)^2 = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}(\vec{\nabla}S)^2 + \frac{k}{2}\Delta S - \frac{k^2 m_0}{2}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$

En prenant $k = \dfrac{\hbar}{m_0}$ et identifiant $\dfrac{\Sigma}{m_0}$ à φ, on voit que le potentiel quantique ne s'élimine pas, mais se double.

M. Régnier a suggéré que l'avant-dernier terme de (7) pourrait être l'appoint que l'accélération moyenne (au sens où nous l'avons définie au chapitre III) reçoit dans le cas non markovien; il est effectivement, comme il convient, nul en valeur moyenne, mais l'hypothèse demanderait d'autres justifications.

Quoi qu'il en soit, le grand intérêt des travaux de M. Régnier est de confirmer l'idée que les lois de la diffusion doivent permettre de rendre compte du potentiel quantique.

b) M. Régnier [6] a également mis en évidence une indétermination de l'énergie cinétique, qui présente une certaine analogie avec l'indétermination de l'énergie en mécanique quantique.

Si le processus est markovien, la loi conditionnelle de

$$\frac{\vec{X}(t') - \vec{X}(t)}{t' - t}$$

tend en général vers une loi de Gauss.

Soit $E_{\vec{x}_t}(f)$ la valeur probable conditionnelle d'une grandeur f.

Étudiant $E_{\vec{x}t}\left(\frac{(x'-x)}{\sqrt{t'-t}}\right)^4$ quand $t'-t$ tend vers zéro, M Régnier montre que cette quantité a une borne inférieure non nulle : elle est supérieure ou égale à $3Ak^2$ (avec $0 < A < 1$).

Soit $\sigma_{\vec{x}t}$ la dispersion de la vitesse; on a :

$$(\sigma x_t)^2 = \frac{1}{(t'-t)^2}\left[E_{\vec{x}t}\left(\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\sqrt{t'-t}}\right)^4 - E^2_{\vec{x}t}\left(\frac{(\vec{x}'-\vec{x})}{\sqrt{t'-t}}\right)^2\right].$$

Et comme pour $t'-t$ assez petit on peut trouver ε tel que :

$$\left|E^2_{\vec{x}t}\left[\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{\sqrt{t'-t}}\right]^2 - k^2\right| \leqslant \varepsilon k^2$$

on en déduit, ε' étant un nombre convenable :

$$(\sigma_{\vec{x}t})^2 \geqslant \frac{2-\varepsilon'}{(t'-t)^2}k^2$$

ce qui donne bien pour l'énergie cinétique W une relation d'incertitude de la forme

$$\delta W \delta t \geqslant \mu$$

analogue à la quatrième relation d'incertitude de la mécanique quantique.

CHAPITRE V

LES LOIS DE LA DIFFUSION ET LA MÉCANIQUE QUANTIQUE NON RELATIVISTE

Remarquons d'abord que les travaux résumés au chapitre précèdent ne précisent pas physiquement la connexion entre la théorie de la diffusion et la théorie quantique. Cette connexion peut être entendue de deux manières :

1° On peut concevoir un fluide réel chaotique qui servirait de substrat subquantique aux lois quantiques.

2° On peut imaginer que la particule quantique elle-même est animée de mouvements aléatoires; le fluide brownien est alors le fluide de probabilité qui la concerne.

La théorie de la diffusion doit pouvoir d'adapter aux deux conceptions. Nous ne préciserons donc pas, dans ce chapitre et dans les suivants, si les calculs concernent une particule quantique ou un ensemble d'éléments subquantiques. La densité du fluide quantique sera identifiée à celle du fluide brownien, mais pourra être une densité réelle ou une densité de probabilité.

1. Première approche.

Réfléchissons sur les résultats obtenus par M. Régnier. Il parvient, par une transformation des grandeurs cinétiques, à retrouver le potentiel quantique, mais avec le signe opposé. On obtiendrait le même résultat en opérant la substitution (IV.1) sur le terme $\frac{1}{2} m_0 v^2$ de l'énergie. Or l'énergie est la somme de deux contributions, cinétique et potentielle. Si au lieu de l'énergie nous formons le lagrangien où elles se retranchent, nous pouvons espérer une expression plus favorable.

Soit donc $\vec{v}$ la vitesse du fluide quantique, que nous assimilons à la vitesse fictive liée à la vitesse moyenne $\vec{u}$ d'un fluide brownien par la relation (IV-1) :

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{k}{2\rho}\vec{\nabla}\rho. \tag{1}$$

Soit une particule de masse m_0; cherchons, pour $u = 0$, la valeur du lagrangien quantique :

$$\mathcal{L} = m_0 v^2 - W \tag{2}$$

avec :

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{3}$$

Tirant $\vec{v}$ de (1), nous obtenons :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 v^2 - m_0 c^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{m_0 k^2}{8\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)^2 - m_0 c^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \tag{4}$$

Or on sait que :

$$\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{(\vec{\nabla}\rho)^2}{4\rho^2}. \tag{5}$$

Portant dans (4), il vient :

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 + \frac{(\vec{\nabla}\rho)^2}{8\rho^2} m_0 \left[k^2 - \frac{\hbar^2}{m_0^2}\right] + \frac{\hbar^2}{4m_0}\frac{\Delta\rho}{\rho}. \tag{6}$$

Mais $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ s'exprime au moyen de l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = \frac{k}{2}\Delta\rho. \tag{7}$$

Soit un volume $d\vec{x}$ contenant un nombre déterminé d'éléments; appelons $\frac{D}{Dt}[\rho\, d\vec{x}]$ la variation de $\rho\, d\vec{x}$ par unité de temps en suivant les éléments; nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}[\rho\, d\vec{x}] &= d\vec{x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right] + \rho\frac{D}{Dt}d\vec{x} \\ &= d\vec{x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}\right] \\ &= d\vec{x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\right] = \frac{k}{2}\Delta\rho\, d\vec{x}.\end{aligned} \tag{8}$$

Portant dans (6), on obtient :

$$(9)\quad \rho\mathfrak{L}\,d\vec{x} = -m_0\rho c^2\,d\vec{x} + \frac{(\vec{\nabla}\rho)^2}{8\rho}m_0\left[k^2 - \frac{\hbar^2}{m_0^2}\right]d\vec{x} + \frac{\hbar^2}{2m_0 k}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[\rho\,d\vec{x}].$$

Le terme médian disparaît si l'on pose, comme M. Fenyes :

$$(10)\qquad k = \frac{\hbar}{m_0}.$$

D'où :

$$(11)\qquad \rho\mathfrak{L}\,d\vec{x} = -m_0c^2\left[\rho d\vec{x} - \frac{\hbar}{2m_0c^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,d\vec{x})\right].$$

Le résultat espéré est bien obtenu; le potentiel quantique s'est éliminé dans l'expression de $\mathfrak{L}$; mais celle-ci peut être encore simplifiée si l'on pose :

$$(12)\qquad \tau_0 = \frac{\hbar}{m_0c^2}$$

(11) s'écrit, au premier ordre en τ_0 :

$$(13)\qquad (\rho\mathfrak{L}d\vec{x})_{(t)} = -m_0c^2[\rho d\vec{x}]\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right).$$

Si nous définissons une densité décalée ρ_0 par :

$$(14)\qquad [\rho d\vec{x}]_{(t)} = (\rho_0 d\vec{x})\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)$$

on voit, après avoir dans (14) changé t en $t-\frac{\tau_0}{2}$, que (13) devient :

$$(15)\qquad \rho\mathfrak{L} = -m_0c^2\rho_0.$$

Le décalage de $\frac{\tau_0}{2}$ peut s'interpréter comme un décalage moyen sur une durée d'incertitude égale à τ_0. Pour que nous retrouvions ainsi l'incertitude sur la durée donnée par (III-14);

$$\theta = \frac{k}{\sigma_0^2} = \frac{\hbar}{m_0\sigma_0^2}$$

il faut que la vitesse σ_0 des éléments libres soit égale à la vitesse c de la lumière.

Nous exposerons au chapitre prochain les raisons qui motivent l'identification des deux vitesses. Pour le moment nous différerons toute discussion physique, et ayant défini par (12) une constante de temps τ_0, nous allons obtenir par voie déductive les lois de la mécanique quantique à partir de celles de la diffusion.

2. Marche déductive.

Ayant posé :

(10) $$k = \frac{\hbar}{m_0}$$

(12) $$\tau_0 = \frac{\hbar}{m_0 c^2} = \frac{k}{c^2}$$

nous définissons une densité nouvelle ρ_0 par :

(14) $$[\rho d\vec{x}]_{(t)} = [\rho_0 d\vec{x}]_{\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)}$$

La relation que nous admettons entre ρ_0 et ρ est quelque peu similaire à celle qui existe entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La vitesse de base est $\vec{u}$, et $\vec{v}$ est une vitesse apparente qui se manifeste au niveau quantique comme conséquence de la diffusion. De même ρ_0 sera pour nous la densité de base, et ρ la densité qui apparaît dans les équations quantiques comme une conséquence de l'effet sur ρ_0 de la constante de temps τ_0.

Remarquons que si l'une des deux densités satisfait à l'équation de la diffusion, il en est de même pour l'autre; cette équation s'écrit en effet en termes finis, et à l'approximation non relativiste; or à cette approximation τ_0 est infiniment petit, par (12) où k est fini et c^2 infini, et d'autre part $\rho - \rho_0$ est du premier ordre en τ_0.

C'est donc par rapport à ρ_0 et $\vec{u}$ que la densité de lagrangien doit être définie. Nous ne posons pas *a priori* son expression générale en fonction de ρ_0 et de $\vec{u}$; nous supposons seulement que pour $u = 0$ elle a la forme la plus simple possible, soit :

$$-\rho_0 m_0 c^2.$$

D'autre part, $\mathfrak{L}$ étant le lagrangien d'un élément fictif du fluide quantique, cette densité est aussi égale à $\rho\mathfrak{L}$; d'où l'équation :

(15) $$\rho\mathfrak{L} = -\rho_0 m_0 c^2.$$

Ayant posé (10), (12), (13), (14) et (15), il suffit de reprendre en sens inverse la démonstration développée ci-dessus. Dans (13) on remplace ρ_0 en fonction de ρ; les calculs seront poussés au second ordre en $\frac{1}{c}$, c'est-à-dire, par (12), au premier ordre en τ_0.

On écrit, par (14), (8) et (10) :

$$\mathfrak{L} = -m_0 c^2 \frac{\rho_0}{\rho} = -m_0 c^2 \left[1 - \frac{\tau_0}{2\rho} d\vec{x} \frac{D}{Dt}(\rho d\vec{x})\right] = -m_0 c^2 + \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

soit par (5) :

$$\mathfrak{L} = -m_0c^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{\hbar^2}{8m_0\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)^2$$

et par (1) et (2) on obtient l'expression quantique de l'énergie :

$$(3)\quad W = m_0v^2 - \mathfrak{L} = \frac{1}{2}m_0v^2 + \left(\frac{1}{2}m_0v^2 - \mathfrak{L}\right)$$
$$= m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$

Ainsi le potentiel quantique se présente comme un pseudo-potentiel traduisant les effets de la diffusion quand on calcule W à partir de $\mathfrak{L}$.

Par ailleurs l'importance physique du principe de Maupertuis, qui s'est dégagée à la naissance de la mécanique ondulatoire par son équivalence avec la principe de Fermat, s'affirme ici à nouveau : il constitue la loi de base qui s'exprime au moyen de la grandeur de base $\vec{u}$, et l'énergie W se déduit de $\mathfrak{L}$ comme grandeur dérivée.

Enfin le raisonnement s'appuie sur l'existence d'une constante de temps τ_0, qui a le rôle d'une limite de durée mesurable. Nous admettrons toujours désormais qu'*une mesure nominalement comptée au temps t s'étend en fait sur la durée* τ_0, *et qu'elle est, au premier ordre en* τ_0, *physiquement valable au temps* $t + \frac{\tau_0}{2}$ (1).

Notons que, si l'expression du lagrangien en fonction de $\vec{u}$ est plus simple qu'en fonction de $\vec{v}$, elle est néanmoins inutilisable dans les calculs usuels effectués à partir de $\mathfrak{L}$. Le champ $\vec{u}$ ne définit pas de lignes de courant, car la densité n'est pas conservative dans les déplacements tangents à $\vec{u}$; le vecteur $\vec{u}$ n'est pas le dérivé de $\vec{x}$. Il faut donc réintroduire $\vec{v}$ dans $\mathfrak{L}$ pour écrire à partir de $\mathfrak{L}$ les équations de Lagrange et de Hamilton.

Partant de l'expression quantique (3) de l'énergie, supposée valable quel que soit $\vec{u}$, on peut trouver l'expression générale de la densité de lagrangien $\mathfrak{D}_{\mathfrak{L}} = \rho\mathfrak{L}$ en fonction de ρ_0 et $\vec{u}$: il suffit de reprendre la marche du paragraphe 1 ; on obtient dans (4) les termes

(1) Le calcul ne réussirait pas si la mesure comptée nominalement au temps t était estimée valable à $t - \frac{\tau_0}{2}$; l'instant initial et l'instant final de la mesure ne sont pas physiquement équivalents.

complémentaires

$$\frac{1}{2} m_0 u^2$$

et

$$-\frac{1}{2} m_0 \frac{k}{\rho} \vec{u} \vec{\nabla} \rho = -\frac{\hbar}{2\rho} \vec{u} \vec{\nabla} \rho.$$

d'où :

$$\mathcal{D}\rho = \rho \mathcal{L} = -\rho_0 m_0 c^2 + \frac{1}{2} \rho m_0 u^2 - \frac{\hbar}{2} \vec{u} \vec{\nabla} \rho$$

soit en remplaçant ρ par ρ_0 dans les deux derniers termes, faibles devant le premier pour $\frac{u}{c} \ll 1$.

$$\mathcal{D}_i = -\rho_0 m_0 c^2 + \frac{1}{2} \rho_0 m_0 u^2 - \frac{\hbar}{2} \vec{u} \vec{\nabla} \rho_0$$

Il nous paraît peu intéressant d'approfondir la signification physique du dernier terme, car l'approximation non relativiste n'a pas une signification précise au niveau brownien : en effet, par (1), $\vec{v}$ dépend non seulement de $\vec{u}$, mais du gradient de la densité; il faudrait fixer des ordres de grandeur relatifs. Nous reviendrons d'ailleurs au chapitre suivant sur la définition de l'approximation newtonienne.

3. L'équation de Schrödinger,

a) Soit d'abord un fluide en mouvement permanent et dont la vitesse conservative $\vec{v}$ est uniforme; soient ρ sa densité, $W' = W - m_0 c^2$ l'énergie newtonienne par élément; nous supposons $\frac{v}{c} \ll 1$.

Nous définissons un scalaire $\psi = a \exp(i\varphi)$, tel que $a = \sqrt{\rho(xyz)}$ et que φ corresponde à la vibration de Compton [1] dans le système propre, soit (les variables propres ayant l'indice zéro):

$$\varphi = \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t_0 = \frac{imc^2}{\hbar} \left(t - \frac{\vec{v}\vec{x}}{c^2} \right).$$

Posant ensuite $\psi = \exp\left(i \frac{mc^2}{\hbar} t \psi' \right)$ calculons $\Delta\psi'$; au second ordre en $\frac{v}{c}$, on peut confondre m avec m_0 dans les termes contenant v en

[1] Celle-ci apparaîtra au chapitre VIII, en liaison avec les propriétés cinétiques du globule aléatoire.

facteurs, et l'on obtient :

$$\Delta\psi' = \left(\Delta\sqrt{\rho} - \frac{im_0}{\hbar}\vec{v}\frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho} - \frac{m_0^2v^2}{\hbar^2}\sqrt{\rho}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0\vec{v}\vec{x}\right).$$

Or $\vec{v}$ étant constant et indépendant du temps, l'équation de continuité donne :

$$\vec{v}.\vec{\nabla}\rho = 0$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\Delta\psi'}{\psi'} = \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} - \frac{m_0^2v^2}{\hbar^2}.$$

Par (3) on obtient l'équation de Schrödinger (en remplaçant W′ par W′ — U dans le cas d'un potentiel extérieur U) :

$$\frac{\Delta\psi}{\psi} = \frac{\Delta\psi'}{\psi'} = -\frac{2m_0\,(W' - U)}{\hbar^2}. \tag{16}$$

b) Si l'on recherche l'équation générale à laquelle satisfait toute superposition d'ondes ψ, on doit éliminer W′ entre (16) et :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}W'\psi \tag{17}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m_0}\Delta\psi + i\frac{U\psi}{\hbar}. \tag{18}$$

Soit maintenant à l'instant initial ($t = 0$) une distribution quelconque des vitesses $\vec{v}$ et des densités ρ dans un fluide brownien (F), que nous supposons seulement irrotationnel ; (cette condition s'applique simultanément à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ qui diffèrent d'un gradient). Nous pouvons pour $t = 0$ définir à une constante près une fonction $\varphi(\vec{r})$ par la condition

$$\vec{v}(\vec{r}, 0) = -\frac{\hbar}{m_0}\vec{\nabla}\varphi$$

puis une fonction

$$\psi(\vec{r}, 0) = \sqrt{\rho(\vec{r}, 0)}\ \exp\ (i\varphi)$$

puis encore une fonction $\psi(\vec{r}, t)$ vérifiant la condition initiale ci-dessus et qui satisfasse pour t quelconque à l'équation (18).

Si l'on appelle $a(\vec{r}t)$ et $\varphi(\vec{r}t)$ l'amplitude et la phase de cette dernière fonction, et pose :

$$\rho(\vec{r}t) = a^2(\vec{r}t); \qquad \vec{v}(\vec{r}t) = -\frac{\hbar}{m_0}\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}t),$$

on définit un fluide conservatif (F′) de densité ρ et de vitesse $\vec{v}$, dont les éléments ont une énergie vérifiant (3), d'où un lagrangien vérifiant (15). Cette dernière équation étant supposée définir l'évolution du fluide brownien (F), qui coïncide avec (F′) pour $t = 0$, on en déduit que (F) se confond avec (F′), et que la fonction d'onde $\psi(\vec{r}t)$ décrit l'évolution de (F).

Ainsi à tout fluide brownien nous avons pu associer une fonction d'onde. Nous reportons au chapitre XII tout commentaire interprétatif.

CHAPITRE VI

ESSAI D'UNE APPROCHE RELATIVISTE DE LA DIFFUSION

1. Observations générales.

Les résultats obtenus au chapitre précédent ont confirmé l'intérêt d'associer un fluide stochastique aux équations de la mécanique quantique. Ce fluide est défini, dans le cadre des lois de la diffusion par sa vitesse $\vec{u}$, sa constante de diffusion k, et les conditions complémentaires (isotropie, ordre infinitésimal des moments d'ordre supérieur pris à la limite). Mais au-dessous du seuil de la diffusion la définition est encore incomplète, car il reste à connaître la vitesse de propagation σ_0 des éléments libres.

Nous avons vu précédemment que le rôle de τ_0 comme constante de temps devient explicable au moyen du seuil de la diffusion, si l'on identifie σ_0 avec la vitesse de la lumière c. Or cette idée est naturelle, car si à la base de la matière on doit supposer un fluide brownien, la vitesse σ_0 des éléments libres de ce fluide est une constante de structure qui doit figurer dans les équations de la matière. Mais il en est déjà ainsi pour la vitesse de la lumière, ce qui rend vraisemblable l'identité de σ_0 et de c.

Il en résulte alors, d'après la fin du chapitre III, que *l'approximation de la théorie classique de la diffusion se confond avec l'approximation non relativiste.*

Ce dernier point serait d'ailleurs par lui-même assez plausible pour faire présumer l'identité des deux vitesses. Nous avons trouvé en effet, en étudiant le seuil de la diffusion, une limitation du domaine de validité de la théorie classique de la diffusion. Mais cette théorie admet d'autre part une limitation, du fait qu'elle n'est pas relativiste : il est naturel de supposer que les deux limitations soient les mêmes.

On peut encore motiver comme suit l'hypothèse proposée. S'il existe un fluide brownien sous-jacent à la matière, il est probable

(notamment pour qu'il y ait continuité physique aux limites du globule matériel), qu'un fluide de même nature, mais infiniment dilué et de vitesse moyenne nulle en chaque point, donne une représentation du vide. Or cette vitesse moyenne s'obtient par composition des vitesses des éléments, sensiblement égales à σ_0 du fait de la dilution, et la composition ne donnera une résultante nulle dans tous les systèmes que si $\sigma_0 = c$.

L'étude du chapitre III montre alors que dans le cas relativiste apparaissent les constantes minimales de longueur et de durée, qui prennent, pour $\sigma_0 = c$, les valeurs :

$$l_0 = \frac{k}{c} = \frac{\hbar}{m_0 c},$$

$$\tau_0 = \frac{k}{c^2} = \frac{l_0}{c} = \frac{\hbar}{m_0 c^2}.$$

Ceci nous fait comprendre le résultat trouvé par MM. Newton et Wigner (voir Introduction) : c'est avec la relativité qu'est apparue l'incertitude de localisation, qui est de l'ordre de la longueur d'onde de Compton.

Remarquons que la relation : $k = \tau_0 c^2$, où k n'est ni infiniment grand ni infiniment petit, prouve à nouveau l'équivalence des approximations : τ_0 nul ou c infini.

2. L'équation de la diffusion en dehors de l'approximation classique.

La connexion qui vient d'apparaître entre la relativité et la diffusion est assez délicate, et ne sera entièrement précisée qu'à la fin de cette étude; en attendant nous procéderons par étapes. Nous ferons d'abord abstraction de toute considération relativiste, et chercherons seulement quelles transformations subissent les formules du processus de type brownien, quand on y introduit une constante de temps. Il est à présumer, d'après les vues exposées ci-dessus, que les nouvelles équations de la diffusion prendront d'elles-mêmes la forme relativiste, sans que le formalisme de l'espace-temps soit introduit au départ : ceci se vérifiera. Alors seulement nous devrons nous interroger sur la variance relativiste des grandeurs considérées.

Les lois classiques de la diffusion sont basées sur le passage à la limite $t' - t \to 0$; cette condition sera remplacée par $t' - t = \tau_0$,

puisque le concept de l'intervalle de temps nul est remplacé par celui de l'intervalle minimal τ_0.

Ainsi, au lieu des définitions III (2) et III (4) qui caractérisent le mouvement brownien généralisé, nous poserons les suivantes pour définir la vitesse moyenne $\vec{u}^1$ et les coefficients de diffusion $k_{ij}^{(1)}$:

$$(1)\quad \vec{u}^{(1)} = \frac{1}{\tau_0}\int (\vec{x}' - \vec{x})\, \mathrm{P}(\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x})d\vec{x}',$$

$$(2)\quad k_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\tau_0}\int (x_i' - x_i)\,(x_j' - x_j)\, \mathrm{P}(\vec{x}'t'/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x})d\vec{x}'.$$

En raison du sens physique de $\vec{u}$ et $\vec{u}^{(1)}$, nous pouvons les considérer conventionnellement comme représentant la vitesse moyenne du fluide aux deux approximations; nous écrirons désormais $\vec{u}$ au lieu de $\vec{u}^{(1)}$. Pour les coefficients de diffusion la situation n'est pas comparable, la valeur adoptée pour k étant une constante universelle; il est seulement certain que, au moins pour un fluide en repos, $k_{ij}^{(1)}$ doit être équivalent à k_{ij} à un certain ordre infinitésimal en τ_0, le passage au cas classique se traduisant par $\tau_0 \to 0$. En fait nous poserons dans tous les cas, au premier ordre en τ_0 :

$$(3)\qquad k_{ij}^{(1)} \sim k_{ij} = k\delta_{ij}$$

et nous verrons par la suite se préciser l'hypothèse physique que nous avons ainsi constituée implicitement.

Nous reprendrons, avec les nouvelles conventions les raisonnements du chapitre II; nous continuerons à considérer τ_0 comme infinitésimal, et pourtant nous obtiendrons des termes nouveaux parce que l'ordre de l'approximation ne sera pas le même.

Les équations du chapitre II sont écrites à l'ordre zéro en $t' - t$; on ne prend en compte que des termes qui ont des limites finies. Elles sont également de l'ordre zéro en τ_0, car à l'approximation non relativiste la constante $k = \tau_0 c^2$ peut être considérée comme finie bien que τ_0 soit infiniment petit, puisque c^2 est infiniment grand.

Dans le cas relativiste, c^2 étant fini, k est du premier ordre en τ_0; c'est donc à cet ordre que les calculs doivent être conduits, d'où l'apparition de nouveaux termes.

Nous reprendrons d'abord les démonstrations du processus markovien, puis du processus généralisé, en différant l'examen des difficultés que soulève le concept de processus markovien dans le cas relativiste.

A. Cas des processus markoviens.

1. *Équation de la diffusion en fonction des variables initiales.*

Nous partons de l'équation I (15), avec : $\Delta t^0 = \tau_0$; nous développons le premier membre au premier ordre en τ_0; à cet effet nous écrivons :

$$P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) = P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0; \vec{x}t) - \tau_0 \frac{\partial}{\partial t^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0, \vec{x}t) + \frac{\tau_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^{02}} P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0, xt) + o \times \tau_0^2$$

d'où :

$$\frac{P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0; \vec{x}t) - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t)}{\tau_0} = \frac{\partial}{\partial t^0} P(\vec{x}^0 \tau^0 + \tau_0, \vec{x}t) - \frac{\tau_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^{0^2}} P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0; \vec{x}t) + o \times \tau_0$$

Le deuxième membre est égal à :

$$-u_i(\vec{x}_0 t_0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0, \vec{x}t) - \frac{1}{2} c^2 \tau_0 \Delta^0 P(\vec{x}^0 t^0 + \tau_0, \vec{x}t) + o \times \tau_0 \left(\Delta^0 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^{02}}\right)$$

l'ordre de grandeur du dernier terme résultant de l'inégalité I (11), car $\frac{(m_{ijl})}{(mi'j')}$ est d'ordre infinitésimal en τ_0, et $(m_{i'j'})$ d'ordre 1.

En groupant les termes et remplaçant t^0 par $t^0 - \tau_0$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + u_i(\vec{x}^0 t^0) \frac{\partial}{\partial x_i^0} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) - \frac{1}{2} c^2 \tau_0 \square^0 P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) = o \left(\square^0 = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^{02}}\right).$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t^0}(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) + \frac{\partial}{\partial x_i^0}[P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) u_i(\vec{x}^0 t^0)] - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) \operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}^0 t_0) - \frac{1}{2} c^2 \tau_0 \square^0 P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}t) = o.$$

Elle est donc l'expression dans le système propre de l'équation covariante suivante (où P désigne la densité propre et x un quadrivecteur)

$$(4\,a) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu^0}(u_\mu P)(\vec{x}^0, \vec{x}) - P(\vec{x}^0 \vec{x}) \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu^0}(\vec{x}^0) - \frac{1}{2} c^2 \tau_0 \square^0 P(\vec{x}^0, \vec{x}) = o.$$

L'apparition des variables de temps et d'espace propres sera commentée ci-après. Pour le moment, nous n'examinons pas la valeur relativiste des équations obtenues; nous nous contentons de rechercher l'effet de l'introduction de la constante de temps τ_0.

2. *Équation de la diffusion en fonction des variables finales.*

Nous écrivons par la relation de Chapman (I, 8)

$$J' = \frac{1}{\tau_0}\int [P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}\, t+\tau_0) - P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}\, t)] f(\vec{x}) d\vec{x}$$

$$= \frac{1}{\tau_0}\left\{\iint f(\vec{x}) P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x}' t) P(\vec{x}' t, \vec{x}\, t+\tau_0) d\vec{x} d\vec{x}' - \int f(\vec{x}) P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) d\vec{x}\right\}.$$

En développant au premier ordre en τ_0 le premier membre, on a :

$$J' = \int f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) d\vec{x} + \frac{\tau_0}{2}\int f(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + o \times \tau_0.$$

Au second membre on reprendra les formules (II-5) à (II-9) en y remplaçant Δt par τ_0; le raisonnement du chapitre II est entièrement valable, les termes en $\frac{\partial^3 P}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}$ étant négligeables comme nous l'avons montré dans la section I ci-dessus; on obtient pour le second membre, après intégration par parties et remplacement de $\vec{x}'$ par $\vec{x}$:

$$J' = \int f(\vec{x}) d\vec{x}\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) u_i(\vec{x} t)\right\} + \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + o \times \tau_0\right].$$

En égalant les deux valeurs de J', on est conduit, au premier ordre en τ_0, à l'équation :

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) + \frac{\partial}{\partial x_i}[P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) u_i(x t)] - \frac{c^2 \tau_0}{2} \Box P(\vec{x}^0 t^0, \vec{x} t) = o.$$

Elle est de forme relativiste, et constitue l'expression, dans le système propre, de l'équation covariante suivante :

$$(5\,a) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\mu}[P(\vec{x}^0, \vec{x}) u_\mu(\vec{x})] - c^2 \frac{\tau_0}{2} \Box P(\vec{x}^0, \vec{x}) = o$$

($\vec{x}$ quadrivecteur, P densité propre) soit, avec la densité de probabilité $p(\vec{x})$ [1] :

$$(6) \qquad \frac{\partial(p u_\mu)}{\partial x_\mu} - \frac{c^2 \tau_0}{2} \Box p = o.$$

---

[1] Nous ne reprenons pas la notation $\rho(\vec{x})$ pour des raisons qui apparaitront plus loin, quand nous procéderons au raccord avec la mécanique quantique.

Ici encore l'expression a été obtenue avec les variables du système propre.

B. Cas des processus non markoviens.

Reprenons la démonstration du chapitre II (2), les α_i et β_{ij} étant définis par (II-24) et (II-25); on aura :

$$\alpha_i(\vec{x}t,\ t+\tau_0) = u_i,$$
$$\beta_{ij}^2(\vec{x}t,\ t+\tau_0) \sim c^2\tau_0\delta_{ij}.$$

La seule modification est que le premier membre de (II-29), où $t' = t + \tau_0$, doit être développé au premier ordre en τ_0, et devient :

$$\int U(\vec{x})\left[\frac{\partial}{\partial t}p(\vec{x}t) + \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p(\vec{x}t)d\vec{x}.\right.$$

On obtient le même terme complémentaire que plus haut, en $\frac{\tau_0}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$, et la même expression pour l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial(pu_\mu)}{\partial x_\mu} - \frac{c^2\tau_0}{2}\Box p = 0. \tag{6}$$

C. Commentaire.

Sans rechercher encore une explication synthétique des résultats obtenus, il convient de faire le point.

L'introduction de la constante de temps τ_0 nous a conduits à de nouvelles équations (4) et (5), qui sont de forme relativiste. A titre provisoire nous nous bornons à postuler qu'elles constituent les équations relativistes de la diffusion, si les densités $P(\vec{x}^0,\ \vec{x})$ et $p(\vec{x})$ qui y figurent sont les densités propres, et si la vitesse est définie au moyen du temps propre. En d'autres termes, si l'on désigne par $P(\vec{x}^0\vec{x})$ et $p(\vec{x})$ les densités propres, et par des indices primés les coordonnées et vitesses d'espace-temps, prises dans le système propre, nous considérerons que les équations écrites sous les formes (4) et (5) avec des grandeurs dont la signification relativiste n'avait pas été précisée, doivent en fait s'écrire avec des notations rectifiées

$$\frac{\partial}{\partial x'^0_\mu}(Pu'_\mu) - P\frac{\partial u'_\mu}{\partial x'^0_\mu} - \frac{c^2\tau_0}{2}\Box'^0 P = 0 \left(\Box' = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x'^2_\mu}\right), \tag{4'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}(Pu'_\mu) - \frac{c^2\tau_0}{2}.\Box' P = 0. \tag{5'}$$

Ceci admis, on obtient les expressions (4 *a*) et (5 *a*) par une transformation de Lorentz.

Nous allons vérifier que l'équation (6), qui est une forme de (5 *a*), permet de retrouver le potentiel quantique relativiste et l'équation de Klein-Gordon.

Nous remarquons au préalable que (6) peut s'écrire

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \tag{7}$$

avec :

$$j_i = pu_i - \frac{c^2}{2}\tau_0 \frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{8}$$

$$j_{i4} = ic\left(p + \frac{1}{2}\tau_0 \frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{9}$$

ce qui permet de définir une vitesse $\vec{v}$ et une densité ρ fictives, formant un quadrivecteur conservatif d'impulsion :

$$v_i = ic\frac{j_i}{j_4} = \frac{pu_i - \frac{c^2}{2}\tau_0 \frac{\partial p}{\partial x_i}}{p + \frac{1}{2}\tau_0 \frac{\partial p}{\partial t}} \tag{10}$$

$$\rho = p + \frac{1}{2}\tau_0 \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{11}$$

3. Le potentiel quantique relativiste et l'équation de Klein-Gordon.

A. Expression du potentiel quantique relativiste.

Nous opérerons par analogie avec la marche suivie dans le cas non relativiste. Nous avions choisi au départ la valeur la plus simple possible pour le lagrangien dans le cas où $u = 0$. Nous adapterons cette valeur, qui deviendra celle du lagrangien dans le système propre.

L'équation (6) nous donne $\frac{D\rho}{Dt}$ au premier ordre en τ_0, c'est-à-dire la variation élémentaire $\tau_0 \frac{D\rho}{Dt}$ au second ordre; c'est à cet ordre que nous pousserons nos calculs.

Nous avons, à l'approximation non relativiste, défini la densité de lagrangien par la formule (V-15) :

$$\rho\mathcal{L} = -\rho_0 m_0 c^2$$

ρ_0 étant défini en fonction de ρ par la relation (V-14).

La grandeur ρ représentait à la fois la densité qui intervient dans les équations quantiques et la densité réelle de probabilité au niveau brownien. Dans le cas relativiste l'équation (11) montre que la densité quantique, à laquelle nous avons conservé le nom de ρ, diffère de la densité de probabilité brownienne que nous avons désignée par p.

Nous définirons encore une densité ρ_0 en fonction de la densité brownienne par la formule (V-14), qui pourra s'écrire :

$$(12) \qquad [\rho_0 d\vec{x}]_{(t)} = [p d\vec{x}]\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)$$

Nous remplacerons (V-15) par :

$$(13) \qquad \rho\mathfrak{L} = -\mu\rho_0 m_0 c^2$$

μ pouvant être une fonction des grandeurs locales, prenant la valeur 1 pour $\tau_0 = 0$, et que nous écrirons au second ordre en τ_0 :

$$\mu = 1 + \alpha\tau_0 + \beta\tau_0^2$$

α et β étant des fonctions indéterminées.

Nous avons par (12) et (13) :

$$\rho\mathfrak{L}d\vec{x} = -(1 + \alpha\tau_0 + \beta\tau_0^2) m_0 c^2 (p d\vec{x})\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right).$$

Or par (11) :

$$(p d\vec{x})\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right) = (p d\vec{x})_{(t)} - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(p u_\nu)_{(t)} d\vec{x}(t)$$

$$= \left[\rho(t) - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial p}{\partial t}(t)\right] d\vec{x}(t) - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(p u_\nu)_{(t)} d\vec{x},$$

d'où par (6) :

$$\rho\mathfrak{L} = -m_0 c^2 (1 + \alpha\tau_0 + \beta\tau_0^2)\left[\rho - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\Box p\right]$$

soit encore, puisqu'au second ordre en τ_0, $\tau_0^2\Box p \sim \tau_0^2\Box\rho$:

$$(14) \quad \mathfrak{L} = -m_0 c^2 (1 + \alpha\tau_0 + \beta\tau_0^2)\left(1 - \frac{\tau_0}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box\rho}{\rho}\right).$$

Nous devons égaler cette expression à celle obtenue au moyen des grandeurs quantiques ρ et $\vec{v}$.

Or on sait que la mécanique relativiste du point matériel libre dérive du lagrangien :

$$\mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nous devons donc poser :

$$(15)\quad \mathfrak{L} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.\,K = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{c^2\tau_0^2}{4\rho^2}(\nabla\rho)^2}\,.\,K$$

[par (8), (9) et (15), et ayant remplacé p par ρ dans les termes en τ_0^2]—, avec K différant de 1 sous l'effet du potentiel quantique.

Le potentiel quantique non relativiste est une fonction paire de τ_0, ce qui laisse penser qu'il doit en être de même du potentiel quantique relativiste.

$\mathfrak{L}$ étant alors dans (15) une fonction paire de τ_0, il doit en être de même dans (14), ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$$

soit en égalant (14) et (15) :

$$\begin{aligned} K^2 &= \left[1-\frac{\tau_0^2}{2\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2-\frac{c^2\tau_0^2}{2}\frac{\Box\rho}{\rho}+2\beta\tau_0^2\right]\left[1+\frac{c^2\tau_0^2}{4\rho^2}\sum_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2\right] \\ &= 1-c^2\tau_0^2\left[\frac{1}{2}\frac{\Box\rho}{\rho}-\frac{1}{4\rho^2}\sum_{1\ (x_4=ict)}^{4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_\nu}\right)^2\right]+\left[2\beta-\frac{1}{4\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2\right]\tau_0^2 \\ &= 1-c^2\tau_0^2\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}+2\tau_0^2\left[\beta-\frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

L'invariance relativiste entraîne :

$$\beta = \frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2+(C)$$

(C) étant une combinaison linéaire d'invariants relativistes, du deuxième degré par rapport à l'ensemble des différentielles $dx_\nu\,dx_\sigma$.

On ne retombe sur l'expression correcte à l'approximation newtonienne que si (C) = 0; d'où :

$$\beta = \frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2.$$

On en tire le lagrangien en fonction de ρ et de $\vec{v}$

$$(16)\qquad \mathfrak{L} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{m_0c^2}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

On en déduit le potentiel quantique

$$(17)\qquad Q = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}.$$

Les expressions de $\mathfrak{L}$ et de Q sont celles données par M. L. de Broglie [8].

B. L'équation de Klein-Gordon.

Pour retrouver l'équation de Klein-Gordon, concernant une particule libre, il suffit de considérer dans le système propre une onde monochromatique

$$\psi = \sqrt{\rho(xyz)}\,\exp\left(\frac{im_0c^2t}{\hbar}\right)$$

et d'écrire que pour une telle onde le potentiel quantique doit s'annuler la particule étant stationnaire. On trouve alors :

$$\frac{\Box\psi}{\psi} = \frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} = \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}.$$

Toute superposition d'ondes ψ satisfait à la même équation, et l'on peut, comme nous l'avons remarqué sur l'équation de Schrödinger relier l'amplitude et la phase d'une solution non monochromatique aux grandeurs locales du fluides $\left(\text{avec ici } v_\mu = -\frac{\hbar}{m_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)$

C. Remarque.

Il est facile d'obtenir $\mathfrak{L}$ en fonction de p, dans le système où $u = 0$; (14) s'écrit au second ordre, en remplaçant α et β par leurs valeurs :

$$\mathfrak{L} = -m_0c^2\left[1 + \frac{\tau_0}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\tau_0^2}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\right]^2\left[1 - \frac{\tau_0}{2\rho}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box\rho}{\rho}\right]$$

soit en développant et remarquant que, dans les termes en τ_0^2, ρ peut être remplacé par p

$$(17\ bis) \qquad \mathfrak{L} = -m_0c^2\left[1 - \frac{\tau_0^2}{8p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box p}{p}\right].$$

Ici encore l'expression est paire en τ_0.

4. Les grandeurs caractéristiques de la diffusion et le changement de repère.

1. Reprenons l'analyse des processus de la diffusion classique, présentée au chapitre III. A l'approximation où la théorie classique est valable, nous avons vu que pendant l'intervalle de temps infinité-

simal $t' - t$ considéré, la longueur du déplacement moyen $\vec{d}$ est négligeable devant la dispersion D; en effet $\vec{d} \sim \vec{u}(t' - t)$ et

$$D \sim \sqrt{k(t' - t)}.$$

Soit $M_i(t)$ la moyenne quadratique de la coordonnée x_i; on a :

$$M_i^2 = d_i^2 + D^2. \tag{18}$$

Dire que d_i est négligeable devant D, c'est dire que pour $t' - t \to 0$ la moyenne quadratique M_i et l'écart quadratique isotrope $D_i = D$ sont équivalents; en d'autres termes :

$$\lim_{t' \to t} \frac{M_i^2}{t' - t} = \lim_{t' \to t} \frac{D^2}{t' - t} = k.$$

D'autre part, k est une constante; la moyenne quadratique M_i et l'écart quadratique D, à la limite $t' - t \to 0$, possèdent donc un caractère invariant, et le mouvement moyen dépend seul du repère; la structure du fluide, définie par k, n'est pas altérée par le mouvement relatif.

En résumé, l'approximation classique de la diffusion s'exprime ainsi :

La moyenne quadratique et l'écart quadratique d'une coordonnée, pris dans un intervalle de temps infinitésimal, sont équivalents, et invariants dans un changement de coordonnées.

Nous avons vu au chapitre III que, si l'on sort de l'approximation où $u \ll \sigma_0$ (soit $u \ll c$), le modèle cesse d'être valable : la sphère d'expansion ne peut plus être considérée comme immobile pendant la durée minimale; des lois nouvelles doivent définir la diffusion.

La dernière propriété énoncée conduit à la même conclusion. C'est pour $t' - t = \tau_0$ que nous devons comparer la moyenne et l'écart quadratiques d'une coordonnée. Or la longueur $u\tau_0$ du déplacement moyen n'est plus négligeable devant la dispersion $l_0 = c\tau_0$.

Pour les coordonnées normales à la vitesse $\vec{u}$, les deux moyennes restent égales, si la direction de $\vec{u}$ n'a pas varié sensiblement pendant le temps τ_0. Mais si nous appelons L et l la moyenne quadratique et l'écart quadratique (pris après la durée de diffusion τ_0) de la coordonnée aléatoire dirigée suivant la vitesse moyenne on a :

$$L^2 = l^2 + u^2\tau_0^2 = l^2 + \frac{u^2}{c^2} l_0^2. \tag{19}$$

Il en résulte que non seulement L et l sont différents, mais encore la différence de leurs carrés $\frac{u^2}{c^2} l_0^2$ dépend du référentiel. Nous énoncerons donc la propriété suivante :

Dans le cas relativiste, la moyenne quadratique L *et l'écart quadratique* l *de l'abscisse prise dans la direction de la vitesse moyenne, et au seuil de la diffusion,* (1) *ne peuvent plus être confondues, et ne peuvent plus être toutes deux invariantes dans un changement de repère.*

Pour poser les lois nouvelles de la diffusion, nous ne disposons que du critère de simplicité. Nous allons essayer tour à tour les deux choix les plus simples : invariance de l ou invariance de L.

Premier choix : invariance de l.

Nous égalons l à sa valeur propre l_0.

Deuxième choix : invariance de L.

Nous posons : $L = l_0$, puisque les deux moyennes se confondent dans le système propre.

L'équation (19) donne alors :

$$l^2 = L^2 - \frac{u^2}{c^2} l_0^2 = l_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \tag{20}$$

L'apparition de la contraction de Lorentz avec le deuxième choix nous incite simultanément :

— à retenir ce deuxième choix.

— à concevoir une connexion des écarts quadratiques avec les longueurs macroscopiques; elle est d'ailleurs assez naturelle, si l'écart quadratique joue le rôle d'un étalon de longueur.

Nous sommes parvenus au point de jonction du macroscopique et du microscopique. Il convient ici de remarquer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont macroscopiquement équivalents, car par (8), (10) et (11), $\rho\vec{v}$ et $p\vec{u}$ diffèrent de $-\frac{c^2}{2}\tau_0 \vec{\nabla} p$, dont l'intégrale de volume, réductible à une intégrale de surface, est nulle sur l'espace entier, p s'annulant à l'infini; les valeurs moyennes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, prises chacune avec la densité qui lui convient, sont donc les mêmes.

Ainsi le postulat d'invariance des moyennes quadratiques des

(1) Au lieu d'être prises après la durée τ_0, les moyennes pourraient être prises au temps rectifié $t + \frac{\tau_0}{2}$, l'expansion étant linéaire entre t et $t + \tau_0$.

coordonnées au seuil de la diffusion donne la loi de contraction des longueurs. De celle-ci on déduit l'ensemble des formules de transformation relativistes, en supposant seulement qu'elles sont linéaires, homogènes et réciproques. Si en effet on pose (en donnant l'indice zéro au système propre).

$$x_0 = \alpha x + \beta$$

la formule (20) donne $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, et comme $x = ut$ pour $x_0 = 0$, on a $\beta = \frac{-u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ soit : $x_0 = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ et par réciprocité :

$$x = \frac{x_0 + ut_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Des deux dernières formules on tire t_0 en fonction de x et de t.

Si inversement on partait de la contraction des écarts quadratiques, on déduirait :

$$L^2 = l_0^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{u^2}{c^2} l_0^2 = l_0^2.$$

En résumé, une fois admise la connexion entre les écarts quadratiques et les longueurs macroscopiques, le postulat de l'invariance des moyennes quadratiques au seuil $t + \tau_0$ de la diffusion (ou au temps moyen $t + \frac{\tau_0}{2}$ de la période d'incertitude) est équivalent au postulat fondamental de la relativité.

3. Il reste à retrouver la loi de la masse et de l'énergie. On peut définir la masse en mouvement m par la relation : $l = \frac{\hbar}{mc}$, analogue à $l_0 = \frac{\hbar}{m_0 c}$. On en déduit : $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Mais on peut aussi procéder d'une manière moins formelle, en remarquant que la formule $m_0 = \frac{\hbar}{l_0 c}$ définit la masse au repos comme inversement proportionnelle au libre parcours, ou comme proportionnelle à la fréquence des chocs. L'équivalence de la masse propre

et de l'énergie propre signifie alors que l'énergie propre n'est autre que l'énergie d'agitation brownienne, et que celle-ci varie comme la fréquence des chocs.

Il suffit alors d'admettre que dans le système en mouvement l'équivalence de la masse et de l'énergie conserve la même signification, et que l'énergie d'agitation reste proportionnelle à la densité du fluide, qui varie comme $\frac{1}{l}$; on a alors

$$\frac{W}{m_0 c^2} = \frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

5. Observations.

A. Remarque sur les processus de Markoff.

On peut se poser une question sur l'existence de processus de Markoff dans le cas relativiste. A première vue, le processus relativiste relevant d'une équation différentielle du second ordre en t, la détermination de $P(t')$ dépend non seulement de celle de $P(t)$, mais de $\frac{\partial p}{\partial t}(t)$, c'est-à-dire de P à un instant légèrement antérieur à t, ce qui est contraire à la définition du processus de Markoff. L'explication pourrait être cherchée dans l'incertitude de détermination temporelle.

On peut pourtant observer que l'équation relativiste de la diffusion est liée à l'équation de Klein-Gordon. Bien que celle-ci soit du second ordre en t, la fonction d'onde relativiste est en réalité déterminée par des équations du premier ordre en t, telles que celle de Dirac, qui est contenue dans l'équation de Klein-Gordon.

Le fait que l'équation relativiste de la diffusion peut être obtenue par des démonstrations fondées sur l'hypothèse markovienne paraît montrer que celle-ci, en tout état de cause, conserve une signification, au moins au premier ordre en τ_0. Il nous semble que ce fait est le plus important, et que le problème peut rester ouvert.

B. Observations d'ensemble sur le présent chapitre.

Nous avons obtenu des équations de forme relativiste sans utiliser au départ le formalisme de l'espace-temps, ce qui était prévisible

d'après l'étude faite au début du chapitre. Ajoutons quelques remarques dans le même sens.

D'abord deux exigences nous apparaissent.

a) L'équation (5) a été établie en considérant un volume étendu, où la vitesse $\vec{u}$ est variable. Elle doit donc être rapportée à un système de référence unique (Σ); le point M dont les coordonnées x_i interviennent dans (1) et (2), doit être lié à (Σ); c'est d'ailleurs à cette condition seulement que (3) exprime le principe d'invariance des moyennes quadratiques.

b) Cette même équation (5) doit en réalité s'entendre sous la forme (5 *bis*) qui la précise, où P désigne la densité propre (car sinon $\square$P ne serait pas invariant), et où la vitesse $\vec{u}$ est définie au moyen du temps propre.

A première vue ces deux exigences semblent s'exclure; la conciliation n'apparaîtra clairement qu'au dernier chapitre. Nous pouvons déjà l'esquisser en remarquant que, l'élément brownien n'ayant pas de vitesse, un système de référence ne peut être défini qu'en fonction du mouvement moyen. A la base de la théorie, où l'on part des éléments individuels, on ne peut donc voir intervenir le formalisme relativiste; la relativité s'introduit implicitement par la formule (3), qui traduit sa connexion avec les lois de la diffusion, c'est-à-dire la relation entre les deux principes d'invariance (section **4** ci-dessus); elle ne se manifeste explicitement qu'en fin de calcul.

De plus, le cas relativiste n'est plus uniquement déterminé par l'ordre de grandeur de la vitesse de translation, mais plus généralement par la rapidité de variation des grandeurs locales dans l'espace et dans le temps. Le cas non relativiste est en effet celui où l_0 et τ_0 sont infiniment petits à l'échelle du système, ce qui revient à dire que les variations des grandeurs du système sur l_0 et τ_0 sont négligeables. On le remarque d'ailleurs sur l'équation (V-1) pour les variations de la densité; si $l_0 \frac{|\nabla \rho|}{\rho}$ devient de l'ordre de l'unité, la différence des vitesses $\vec{u}$ et $\vec{v}$ devient de l'ordre de c, de sorte que l'une des deux au moins est relativiste.

CHAPITRE VII

ÉTUDE DE L'ORDRE D'APPROXIMATION SUPÉRIEUR POUR L'ÉQUATION DE LA DIFFUSION ET LE POTENTIEL QUANTIQUE.

Nous avons successivement établi l'équation de la diffusion à l'ordre zéro et à l'ordre 1 en τ_0, ce qui nous a conduits à calculer le potentiel quantique respectivement au deuxième et au troisième ordre en τ_0; la première étape a donné l'équation de Schrödinger, la deuxième celle de Klein-Gordon.

Il convient donc d'essayer d'obtenir une équation de la diffusion valable au second ordre en τ_0, pour examiner d'abord s'il est possible d'en tirer une nouvelle expression invariante du potentiel quantique, et ensuite si cette expression conduit à une nouvelle équation d'ondes.

1. L'équation de la diffusion au second ordre en τ_0.

A. Nouvelles conventions.

1. Les corrections cherchées sont soumises aux conditions suivantes :

a) Les termes ajoutés devront s'exprimer rationnellement en fonction des densités et des composantes de la vitesse, ainsi que de leurs dérivées.

b) Ils devront présenter la covariance tensorielle dans l'espace à trois dimensions, ainsi que les symétries nécessaires.

c) Dans les fluides de Schrödinger et de Klein-Gordon, la vitesse quantique $\vec{v}$ est irrotationnelle, donc aussi $\vec{u}$, qui diffère de $\vec{v}$ d'un gradient. Nous montrerons dans la troisième partie que le spin est lié au caractère rotationnel du fluide brownien. Ici, négligeant encore les effets de spin, nous n'admettrons pas de termes en $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}$.

2. Revisons maintenant les conventions admises pour le calcul au premier ordre.

a) La vitesse définie par (VI-1), — et qui désormais sera appelée $\vec{u}_1$ —, ne représente plus la vitesse vraie $\vec{u}$; on écrira $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}'$ et, compte tenu des conditions précédentes, on devra poser, avec des coefficients numériques indéterminés λ^a, λ^b, λ^c, λ^d, α, β, ($\vec{u}$ et $\vec{u}_1$ étant équivalents dans les termes correctifs) :

$$u_i' = \frac{\tau_0^2}{p}\left\{\lambda^{(a)}\frac{\partial^2(pu_l)}{\partial t^2} + \lambda^{(b)}c^2\frac{\partial p}{\partial x_c}\cdot(\operatorname{div}\vec{u}) + \lambda^{(c)}p\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right.$$
$$\left. + \lambda^{(d)}pu_i\left[(\operatorname{div} u)^2 + \frac{\alpha}{p^2}\sum_j\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\beta}{p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2\right]\right\}.$$

b) Au lieu de (VI-3) nous poserons :

$$k_{ij} = k\delta_{ij} + \lambda^{(e)}\frac{\tau_0^2}{p}\frac{\partial}{\partial t}(pu_iu_j) + \lambda^{(f)}\frac{\tau_0^2}{p}u_iu_j\frac{\partial p}{\partial t}.$$

c) Enfin nous introduirons les moments du troisième ordre et poserons :

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{\tau_0}\int (x_i' - x_i)\,(x_j' - x_j)\,(x_k' - x_k)\,\mathrm{P}[\vec{x}',\ t + \tau_0/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}]\,dx$$
$$= \lambda^{(g)}\tau_0^2u_iu_ju_k.$$

B. Obtention de la nouvelle équation.

Reprenons la démonstration de l'équation de la diffusion, dans le cas le plus général, non nécessairement markovien [Chapitres II (2) et VI (2-B)]. Le développement doit être poussé jusqu'aux dérivées du troisième ordre.

Au premier membre on obtient le terme nouveau :

$$\frac{1}{6}\tau_0^2\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}.$$

Au second membre les intégrations par parties donnent :

pour *a*) :

$$-\frac{\partial(pu_i')}{\partial x_i},$$

pour *b*) :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(pk_{ij}),$$

pour *c*) :

$$-\frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(p\mu_{ijk}).$$

La somme des termes

$$-\frac{1}{6}\tau_0^2\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}, \qquad -\tau_0^2\lambda^a\frac{\partial^3(pu_i)}{\partial t^2\,\partial x_i},$$
$$\frac{1}{2}\lambda^{(e)}\frac{\tau_0^2\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial t}(pu_iu_j), \qquad -\frac{1}{6}\lambda^g\tau_0^2\frac{\partial^3(pu_iu_ju_k)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}$$

donne pour $\lambda^a = \frac{1}{6}$, $\lambda^e = \frac{1}{3}$, $\lambda^g = -1$, l'invariant tensoriel

$$\frac{1}{6}\tau_0^2\frac{\partial^3(pu_\mu u_\nu u_\sigma)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\sigma}$$

(puisqu'il demeure entendu que les variables de temps et d'espace restent les variables propres). Tous les autres coefficients seront choisis nuls. L'équation de la diffusion devient :

$$(1) \qquad \frac{\partial(pu_\mu)}{\partial x_\mu} - \frac{c^2}{2}\tau_0\,\Box\,p - \frac{1}{6}\tau_0^2\frac{\partial^3(pu_\mu u_\nu u_\sigma)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\sigma} = 0.$$

Elle s'écrit encore $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$, avec :

$$(2) \qquad j_\mu = pu_\mu - \frac{c^2\tau_0}{2}\frac{\partial p}{\partial x_\mu} + j'_\mu$$

en posant :

$$j'_\mu = -\frac{1}{6}\tau_0^2\frac{\partial^2(pu_\mu u_\sigma)}{\partial x_\nu\,\partial x_\sigma}.$$

2. Recherche du potentiel quantique. Application à l'équation d'ondes.

A. Le potentiel quantique.

Nous poserons encore :

$$\rho = \frac{j_4}{ic}; \qquad v_i = \frac{j_i}{\rho}$$

puis :

$$v'_i = \frac{j'_i}{\rho}, \qquad \rho' = \frac{j'_4}{ic}$$

Nous nous plaçons dans le système où $u = 0$, et nous cherchons à écrire, comme en (VI-15)

$$(4) \qquad \mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,K$$

pour égaler cette expression à

$$C = -\mu' m_0 c^2 \frac{1}{d\vec{x}} [pd\vec{x}]_{\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)} \tag{5}$$

où cette fois μ' est un développement du troisième degré en τ_0, et où

$$[pd\vec{x}]_{\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)} = [pd\vec{x})_t - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(pu_\mu) \tag{6}$$

avec :

$$\tau_0 \frac{\partial}{dx_\mu}(pu_\mu) = \frac{c^2\tau_0^2}{4}\Box p + \frac{\tau_0^3}{12}\frac{\partial^3(pu_\mu u_\nu u_\sigma)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu\,\partial x_\sigma} \tag{7}$$

Nous pourrions écrire μ' avec des coefficients indéterminés; il est plus commode de partir directement de (VI-17 *bis*), soit

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2\left[1 - \frac{\tau_0^2}{8p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box p}{p}\right]$$

et d'ajouter des termes correctifs, choisis par les conditions suivantes :

1) On exigera l'invariance tridimensionnelle.

2) Dans (VI-17 *bis*) nous avions :

une contribution $\left(-\frac{\tau_0^2}{8p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2\right)$ liée à la variation de la densité, et contenant une dérivée du premier ordre;

une contribution $\left(-\frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box p}{p}\right)$ liée aux dérivées premières du courant complémentaire $-\frac{c^2\tau_0}{2}\frac{\partial p}{\partial x_\mu}$.

Nous admettrons les mêmes conditions, le courant complémentaire étant cette fois j'_μ.

Nous sommes donc amenés à écrire, avec des coefficients indéterminés :

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2\left[1 - \frac{\tau_0^2}{8p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \frac{c^2\tau_0^2}{4}\frac{\Box p}{p} + \theta\frac{c^2\tau_0^3}{p^3}\frac{\partial p}{\partial t}\sum_i\left(\frac{\partial p}{dx_i}\right)^2 + \eta\,\tau_0\frac{\partial v'_i}{dx_i} + \zeta\frac{\tau_0}{\rho}\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \xi\,\tau_0\frac{v'_i}{\rho}\frac{\partial \rho}{dx_i}\right]. \tag{8}$$

Il faut dans (8), au premier ordre, remplacer p et ses dérivées en fonction de ρ; on écrira :

$$\begin{cases} p = \rho - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + 0 \times \tau_0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial x_\mu} - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x_\mu} + 0 \times \tau_0 \\ \Box p = \Box\rho - \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Box\rho + 0 \times \tau_0 \end{cases} \tag{9}$$

En remplaçant on obtient :

$$(10)\quad \mathcal{L} = -m_0c^2\left[1-\frac{\tau_0^2}{8\rho^2}\left(1-\frac{\tau_0}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\tau_0}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right)^2\right.$$
$$-\frac{c^2\tau_0^2}{4\rho}\left(\Box\rho-\frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Box\rho\right)\left(1+\frac{\tau_0}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)+\theta c^2\frac{\tau_0^3}{\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\sum_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2$$
$$\left.+\eta\frac{\tau_0}{\rho}\frac{\partial j_i'}{\partial x_i}+\zeta\frac{\tau_0}{\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\xi\tau_0\frac{v_i'}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right]$$
$$=-m_0c^2\left[1-\frac{\tau_0^2}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2-\frac{c^2\tau_0^2}{4\rho}\Box\rho+\frac{\tau_0^3}{8\rho^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^3\right]+\frac{c^2\tau_0^3}{8}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\rho}{\rho}+\theta c^2\frac{\tau_0^3}{\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\Sigma\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2$$
$$\left.+\eta\tau_0\frac{\partial j_i'}{8x_i}+\frac{\zeta}{\rho}\tau_0\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\xi\tau_0\frac{v_i'}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right].$$

D'autre part on a par (4) et (2), pour $u=0$:

$$K=\mathcal{L}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}=\mathcal{L}+\sum_i\frac{j_i^2}{2\rho^2c^2}=\mathcal{L}+\sum_i\frac{1}{2\rho^2c^2}\left[-c^2\frac{\tau_0}{2}\frac{\partial p}{\partial x_i}+j_i'\right]^2.$$

D'où par (9) et (10) :

$$K=1-\frac{c^2\tau_0^2}{2}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}+\frac{c^2\tau_0^3}{8\rho^2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial t\partial x_i}-\frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^3\right.$$
$$\left.+\rho^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\rho}{\rho}\right]-\frac{\tau_0}{2\rho^2}j_i'\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\theta c^2\frac{\tau_0^3}{\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\sum_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2+\eta\tau_0\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}$$
$$+\frac{\zeta}{\rho}\tau_0\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\xi\tau_0\frac{v_i'}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}.$$

Et comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\rho}{\rho}=2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\left[\Sigma\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\,\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right]$$

il reste :

$$K=1-\frac{c^2\tau_0^2}{2}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}+\frac{c^2\tau_0^3}{4}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}+\left(\theta-\frac{1}{8}\right)\frac{c^2\tau_0^3}{\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\sum_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2$$
$$+\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\frac{\tau_0}{\rho}v_i'\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\eta\tau_0\frac{\partial v_i'}{\partial x_i}+\zeta\frac{\tau_0}{\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial t}.$$

En prenant $\theta=\frac{1}{8}$, $\xi=\frac{1}{2}$, $\eta=\zeta=0$, nous trouvons :

$$K=1-\frac{c^2\tau_0^2}{2}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}+\frac{c^2\tau_0^3}{4}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

ou

$$(11) \qquad K = 1 - \frac{c^2\tau_0^2}{2}\left(\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)_{\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)}.$$

Cette équation est covariante à condition d'écrire dans un système quelconque (t_0 étant le temps propre) :

$$\left(\frac{\Box\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}\right)_{\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)} = \left(\frac{\Box\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}\right)_t - \frac{\tau_0}{2}\frac{D}{Dt_0}\left(\frac{\Box\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}\right)$$

et l'on peut bien prendre $\frac{D}{Dt_0} = v_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, puisque v_μ et u_μ ont une différence du premier ordre en τ_0.

B. L'équation d'ondes.

Ainsi nous avons obtenu une expression plus fine du potentiel quantique, tenant compte du décalage de temps $-\frac{\tau_0}{2}$ qui correspond à la définition du lagrangien; celui-ci étant en effet la grandeur de base, les grandeurs quantiques doivent, par rapport à lui, être décalées de $+\frac{\tau_0}{2}$.

Pour trouver l'équation de Klein-Gordon, nous avions écrit que dans l'onde monochromatique stationnaire le potentiel quantique s'annule. Cette condition nous redonne $\frac{\Box\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0$; nous n'obtiendrons donc pas d'autre équation que celle de Klein-Gordon. Il est tout à fait probable que le résultat serait le même aux approximations supérieures; nous trouverions seulement chaque fois une correction plus fine des grandeurs locales.

Pourtant il y a lieu de penser (et nous le vérifierons sur l'équation de Dirac), que la mécanique quantique cesse d'être valable quand τ_0 ne peut plus être considéré comme infiniment petit à l'échelle des variations du système. Si celles-ci devenaient fortes sur l_0 et τ_0, les dérivées de la densité deviendraient infiniment grandes, et la notion de potentiel quantique perdrait sa signification, qui est celle d'un raccordement du corpuscule microscopique avec la mécanique classique. L'équation de la diffusion disparaîtrait en même temps, car elle s'exprimerait par une série en τ_0 dont la convergence ne serait plus assurée.

CHAPITRE VIII

INCIDENCES DES LOIS DE LA DIFFUSION SUR LA MÉCANIQUE QUANTIQUE.

1. Premières incidences.

A. Les états d'énergie négative.

Soit un globule constitué par une superposition d'ondes monochromatiques. On sait que si le globule a des dimensions d'ordre supérieur à la longueur d'onde de Compton, il peut être représenté par des composantes d'énergie positive; dans le cas contraire il est nécessaire d'introduire l'énergie négative. Celle-ci apparaît encore quand l'énergie d'une particule subit des variations de l'ordre de m_0c^2 sur des longueurs ou durées de l'ordre de celles de Compton.

Si les dimensions du globule sont de l'ordre de l_0, le vecteur $l_0 \frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}$ doit avoir des valeurs sensibles et de directions rapidement variables. Reprenons alors la relation (IV-1)

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{k}{2\rho}\vec{\nabla}\rho = \vec{u} - c\frac{l_0}{2\rho}\vec{\nabla}\rho.$$

Supposons faible devant c la vitesse conservative $\vec{v}$ du globule. Avec les hypothèses ci-dessus sur les dimensions du groupe d'ondes, la vitesse $\vec{u}$ prendrait sur le pourtour des valeurs voisines de c et de directions divergentes; et comme $\vec{u}$ est la grandeur concrète de base, il en résulterait une dislocation du globule.

Supposons de même un champ extérieur dont les variations spatiales soient assez fortes pour provoquer sur l_0 une variation relative appréciable de l'énergie de la particule. L'action du champ créerait sur l_0 des variations relatives sensibles de la densité; d'où

encore, entre deux régions du globule, des variations spatiales relativistes de la vitesse $\vec{u}$, ce qui conduirait à l'éclatement.

Si enfin le champ subit des variations temporelles sensibles sur τ_0, elles se traduisent, dans la propagation des actions, par des variations spatiales sensibles sur l_0.

Rappelons que les lois de la diffusion ne sont valables qu'au premier ordre en τ_0 (c'est-à-dire, pour c fini, au premier ordre en l_0). Nous montrerons plus loin que l'équation de Dirac paraît aussi n'être valable qu'à cet ordre. Il faut donc que τ_0 et l_0 restent petits à l'échelle des variations du système.

Ainsi la liaison, signalée notamment par MM. Newton et Wigner (voir Introduction) entre la possibilité de localisation et l'énergie négative, peut s'interpréter ainsi : l'une disparaît avec l'autre. Il apparaît, en résumé, que *les lois de la diffusion suppriment les états d'énergie négative.*

Ceci ne nous paraît pas incompatible avec l'utilité, sanctionnée par l'expérience, de ces états, et de la théorie des trous, comme intermédiaires de calcul.

B. Les particules virtuelles.

Une particule est dite réelle ou virtuelle suivant que sa durée de vie, estimée dans son système propre, est d'ordre supérieur ou inférieur à τ_0.

Le rôle de constante minimale joué par τ_0 dans le système propre donne un sens concret à cette distinction.

L'existence physique des particules virtuelles est conjecturale; on peut se demander si elles aussi sont plus que des intermédiaires de calcul.

Sans émettre encore un avis sur ce point, observons que τ_0 définissant la limite d'application des lois quantiques, la réalité des particules virtuelles n'est admissible qu'en dehors du domaine régi par ces lois.

2. Les relations d'incertitude.

Comme indiqué au début de cette étude, nous n'avons pas précisé si le fluide brownien considéré est le fluide de probabilité d'une particule quantique ou un fluide réel formé d'éléments subquantiques.

Nous allons montrer que la première conception (que nous serons amenés finalement à unifier avec la seconde) permet d'obtenir les relations d'incertitude.

Nous considérons donc la particule quantique comme un élément brownien. Un tel élément n'a pas de vitesse; la vitesse $\vec{u}$ (donc aussi la vitesse quantique $\vec{v}$), est définie par une moyenne sur l'espace entier. On voit se dessiner les incertitudes quantiques.

Sous une autre forme les incertitudes sur les mesures dépendent des durées de ces mesures. Une mesure longue, augmentant la diffusion, rend moins précise la connaissance de la position, mais elle rend plus précise celle de la vitesse (et de l'énergie), puisqu'elle rapproche la vitesse mesurée de sa valeur moyenne.

Notons qu'au premier ordre en τ_0 (VI, 2 et 3), les lois de la diffusion, dans le système propre, sur les variables xyz, sont indépendantes; les lois de base du fluide brownien peuvent donc s'établir comme s'il s'agissait de trois diffusions linéaires suivant Ox, Oy, Oz. Il en résulte que la mesure de l'abscisse x est sans corrélation avec celles des composantes p_y et p_z de l'impulsion $\vec{p}$.

1. Pour calculer, en fonction de la durée de la mesure, les incertitudes sur x et p_x (diffusion linéaire suivant Ox), étudions d'abord une expérience ayant la durée minimale τ_0; l'expérience est valable au temps moyen $t + \frac{\tau_0}{2}$; la dispersion sur x est mesurée dans le système fixe; c'est donc la moyenne quadratique invariante de l'abscisse, et au temps considéré on a :

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \frac{l_0}{2}.$$

La dispersion sur p_x est la moyenne quadratique w de la quantité de mouvement dans le système propre, suivant Ox; au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$ l'expansion est celle de la propagation libre, ce qui donne :

$$w = \sqrt{\overline{(\Delta p_x)^2}} = m_0 c$$

D'où :

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}\sqrt{\overline{(\Delta p_x)^2}} = \frac{m_0 c l_0}{2} = \frac{\hbar}{2}.$$

2. Supposons maintenant que la durée de l'expérience soit $n\tau_0$, de sorte que la mesure sera valable au temps $t + \frac{n\tau_0}{2}$.

La dispersion variant comme la racine de la durée, on aura :

$$\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{n}\,\frac{l_0}{2}.$$

La vitesse étant définie à partir du déplacement probable pendant le temps τ_0, nous devons fractionner la durée donnée, en n intervalles égaux à τ_0, l'impulsion mesurée étant la moyenne des impulsions définies dans chaque intervalle. Or dans chacun d'eux la dispersion sur p_x est $m_0 c$; d'où sur la moyenne une dispersion :

$$\sqrt{(\Delta p_x)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, m_0 c$$

d'où encore :

$$\sqrt{(\Delta x)^2}\sqrt{(\Delta p_x)^2} = \frac{\hbar}{2}. \qquad (1)$$

Remarque. — Ces vues sont en accord avec l'équation de Dirac; la vitesse $\vec{\alpha}$, dont les composantes ont la valeur propre c, est celle de l'élément brownien individualisé; la vitesse mesurée $\vec{v}$ est la vitesse d'ensemble.

3. La longueur et le « rayon » des particules.

Ayant obtenu une longueur minimale, il est naturel de chercher si elle peut être rapprochée du « rayon » des particules élémentaires, tel que les données expérimentales permettent aujourd'hui de le concevoir. Cette notion de « rayon » a deux origines différentes.

a) Il y a d'une part l'idée d'une structure étendue des particules; elle paraît imposée, pour le nucléon, par l'étude des effets de diffraction qu'il produit sur les électrons. Cette étude conduit à admettre une répartition de charge jusqu'à une distance de l'ordre de 10^{-13} cm du point central.

b) Le « rayon », au sens où l'entend la théorie quantique des champs, concerne les interactions d'une particule avec un champ. Il peut être le minimum admis pour les longueurs d'ondes du champ, ou une longueur équivalente résultant d'un facteur d'amortissement sur les composantes du champ.

Nous examinerons successivement les relations possibles de l_0 avec les deux notions.

A. La structure du nucléon (diffraction des électrons).

Nous avons jusqu'à présent étudié le fluide brownien (sans d'ailleurs préciser sa nature physique) et non la particule. Supposons, (ce qui est en accord avec la section **2**, et sera discuté au dernier chapitre) que la particule puisse être assimilée à un élément brownien. Dans son interaction avec une autre particule elle sera, par l'effet de la diffusion, représentable par un nuage aléatoire dont la forme dépendra de la durée t de l'expérience. Nous pourrons considérer que nos conceptions ne sont pas en désaccord avec l'expérience, si l'on peut déterminer $t = \varkappa\tau_0$ tel que la structure brownienne du nucléon coïncide avec sa structure expérimentale, $\varkappa$ étant supérieur à 1 et d'un ordre de grandeur comparable à l'unité.

Plusieurs modèles ont été proposés pour le nucléon; ils sont mentionnés dans un article de M. Hofstädter [9]; le rayon est caractérisé par une moyenne quadratique de répartition de la charge; la moyenne expérimentale pour les différents modèles est d'environ

$$A = 7{,}5 \times 10^{-14} \text{ cm}$$

M. Hofstädter indique que la loi de répartition de Gauss est l'une des mieux adaptées; il est particulièrement naturel de la choisir comme loi de probabilité de la diffusion.

Comme à la durée $t = \varkappa\tau_0$ correspond un écart quadratique de diffusion $l'_0 = \varkappa\tau_0$ nous écrirons pour la loi de probabilité

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2l'^2_0}\right).$$

Nous devrons alors calculer :

$$A^2 = \frac{\int_0^\infty r^2\, 4\pi r^2 \rho(r)\, dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r)\, dr}.$$

Soient $4\pi\rho_0 N$ et $4\pi\rho_0 D$ le numérateur et le dénominateur. Posons

$$u = \frac{r}{l_0\sqrt{2}}$$

$$N = \int_0^\infty r^4 \exp\left(-\frac{r^2}{2l'^2_0}\right) dr = 2^{\frac{5}{2}} l'^5_0 \int_0^\infty u^4 \exp(-u^2)\, du$$

soit par intégration par parties :

$$N = 2^{\frac{5}{2}} l'^{\frac{5}{2}}_0 \cdot \frac{3}{2} \int_0^\infty u^2 \exp(-u^2)\, du.$$

D'autre part :

$$D = 2^{\frac{3}{2}} l_0'^3 \int_0^\infty u^2 \exp(-u^2)\, du$$

d'où :

$$A^2 = \frac{N}{D} = 3l_0'^2.$$

En identifiant A avec la valeur expérimentale, on trouve :

$$l_0' = \frac{A}{\sqrt{3}} = 4{,}4 \times 10^{-14}\ \text{cm},$$

Pour le nucléon $l_0 = 2 \times 10^{-14}$ cm; d'où $k = 2{,}2$, ce qui est dans les limites de vraisemblance.

B. Le rayon des particules dans la théorie quantique des champs.

Il s'agit ici d'une notion toute différente. Rien ne nous autorise à considérer l_0 comme une limite inférieure des longueurs d'ondes. Rien ne nous autorise davantage à affecter à chaque point du nuage aléatoire une composante $\vec{k}$ du rayonnement, ce qui donnerait par intégration comme l'a montré M. Rosen [10], un facteur $\exp\left(-\frac{k^2}{2} l_0'^2\right)$. Les suggestions du chapitre XI, où nous étudions l'émission d'un photon par un électron, incitent à la considérer comme une action d'ensemble, et il ne saurait être question de la lier à un élément brownien individualisé.

Nous signalerons néanmoins une incidence sur la théorie quantique des champs : le conflit entre la convergence et la covariance disparaît comme suite aux vues présentées sur la relativité. Elles conduisent en effet — nous le préciserons mieux dans le dernier chapitre, — à limiter la validité des lois relativistes dans le domaine microscopique.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE AVEC EFFETS DE SPIN

CHAPITRE IX

INTRODUCTION DU SPIN DANS LES PROCESSUS DE DIFFUSION

Nous avons jusqu'à présent examiné les relations de la théorie de la diffusion avec la mécanique quantique, à l'approximation où les effets de spin peuvent être négligés : ainsi nous avons déduit des lois browniennes les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon.

Nous allons généraliser ces résultats au cas où les effets de spin ne sont plus négligeables, c'est-à-dire au cas de l'équation de Dirac : nous montrerons pourquoi il n'est pas possible de raisonner d'une manière tout à fait satisfaisante sur l'équation de Pauli.

Comme précédemment c'est le fluide quantique que nous étudions, et non la particule. Ainsi quand nous parlerons de spin, d'énergie, etc..., il faudra entendre le quotient, par la densité du fluide, des densités de valeur moyenne de spin, d'énergie, etc...

Auparavant nous allons rappeler la représentation de l'équation de Dirac, établie par M. Takabayasi [11], qui nous servira à plusieurs reprises.

1. La représentation de Takabayasi.

A partir du spineur φ à quatre composantes de l'équation de Dirac, on peut former les grandeurs tensorielles suivantes :

Invariants :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \varphi^+ \gamma_4 \varphi = \bar{\varphi} \cdot \varphi, \\ \sigma = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}. \end{cases}$$

Pseudoscalaire : $\Omega_2 = i\bar{\varphi}\gamma_5\varphi$.

Vecteurs : (densité de courant)

$$\frac{J_\mu}{m_0} = \sigma v_\mu = i\bar{\varphi}\gamma_\mu\varphi = c\left\{-\varphi^+\vec{\alpha}\varphi,\ i\varphi^*\varphi\right\}$$

$$J_\mu = i\frac{\hbar}{2}\left[\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_\mu}\varphi - \bar{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right].$$

Pseudovecteurs :

$$J'_\mu = -\frac{\hbar}{2}\left[\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_\mu}\gamma_5\varphi - \bar{\varphi}\gamma_5\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right];$$

(densité de spin)

$$S_\mu = -i\frac{\hbar}{2}\bar{\varphi}\gamma_5\gamma_\mu\varphi;$$

(opposé du pseudovecteur S_μ de Takabayasi).

Tenseur : (tensions, impulsion-énergie)

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2}(\bar{\varphi}\gamma_\nu\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\bar{\varphi}\gamma_\nu\varphi).$$

(D'autres grandeurs sont mentionnées pour mémoire, notamment le tenseur densité de moment électrique et magnétique

$$M_{\mu\nu} = -\frac{ie\hbar}{2m_0c}\bar{\varphi}\gamma_\mu\gamma_\nu\varphi.)$$

M. Takabayasi a établi, par élimination du spineur φ et de ses dérivées, des relations entre ces grandeurs. Dans le système propre en M (où $v = 0$), elles s'écrivent comme suit, en l'absence de champ, posant

$$S_\mu = \frac{\hbar}{2}\sigma s_\mu, \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Omega_2}{\Omega_1},$$

$$G_\mu = \frac{1}{\sigma}(\Omega_1 J_\mu + \Omega_2 J'_\mu), \qquad W = -icG_4;$$

et désignant par des lettres latines les indices d'espace, par des lettres grecques les indices d'espace-temps :

(1) $$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2,$$

(2) $$S^2 = \sigma^2\frac{\hbar^2}{4},$$

(3) $$\frac{\partial S_\mu}{\partial x_\mu} = m_0c\Omega_2 \quad \left(S_4 = \frac{i}{c}\vec{v}\vec{S}\right)$$

ou

$$\sin \mathcal{A} = \frac{l_0}{2\sigma} \frac{\partial(\sigma s_\mu)}{\partial x_\mu}, \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{S}}}{dt} = \vec{\Lambda} \wedge \vec{\mathrm{S}} \tag{5}$$

avec

$$\vec{\Lambda} = \mathrm{rot}\, \vec{v} + c \vec{\nabla} \mathcal{A}, \tag{6}$$

$$\vec{\mathrm{G}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{S}} + \frac{1}{c} \vec{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \wedge \vec{\mathrm{S}}), \tag{7}$$

$$\mathrm{W} = m_0 \Omega_1 c^2 - \vec{\mathrm{S}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} - c \vec{\mathrm{S}} \vec{\nabla} \mathcal{A}, \tag{8}$$

$$\theta_{ij} = - c \mathrm{S}_j \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i} + \varepsilon_{jkl} \mathrm{S}_k \frac{\partial v_l}{\partial x_i}, \tag{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \left(\frac{\vec{\mathrm{G}}}{\sigma} \right) = - \frac{\hbar}{2} \vec{\mathrm{D}}, \tag{10}$$

avec

$$\mathrm{D}_l = \begin{vmatrix} s_x & s_y & s_z \\ \partial_i s_x & \partial_i s_y & \partial_i s_z \\ \partial_j s_x & \partial_j s_y & \partial_j s_z \end{vmatrix} \tag{11}$$

(i, j, l formant une permutation paire de x, y, z)

$$\left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_m} = \varepsilon_{ijk} \mathrm{S}_l \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial v_j}{\partial t} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} - \frac{\partial s_j}{\partial t} \frac{\partial s_k}{\partial x_m} \right], \tag{12}$$

$$\mathrm{J}_\mu = \frac{\Omega_1}{\sigma} \mathrm{G}_\mu - \frac{\Omega_2}{c\sigma} \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu}, \tag{13}$$

$$\mathrm{G}_\mu = \frac{1}{\sigma} (\Omega_1 \mathrm{J}_\mu + \Omega_2 \mathrm{J}'_\mu). \tag{14}$$

En dehors du système propre il faut, au premier ordre en $\frac{v}{c}$, remplacer (7) par :

$$\vec{\mathrm{G}} = m_0 \Omega_1 \vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{S}} + \frac{1}{c} \vec{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \wedge \mathrm{S}). \tag{15}$$

La relation de continuité $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\sigma \vec{v}) = 0$ est mentionnée pour mémoire.

Dans le système propre $\theta_{\mu 4} = i \mathrm{G}_\mu$, ce qui incite à considérer G_μ comme le quadrivecteur d'impulsion-énergie.

2. Propriétés cinétiques du globule aléatoire.

A. — Position du problème.

En l'absence d'effets de spin le processus de diffusion est isotrope : c'est ce qu'exprime la loi $k_{ij} = k\delta_{ij}$. Ce processus peut être représenté par le globule de probabilité au temps rectifié $t + \frac{\tau_0}{2}$, qui lui-même est schématisé par la sphère (Σ) centrée sur la position M donnée au temps t, et dont le rayon est la dispersion $\frac{l_0}{2}$.

Si le spin $\vec{S}$ intervient, une direction devient privilégiée. Une question se pose d'abord : concerne-t-elle l'élément brownien, ou le globule aléatoire?

Dans la première hypothèse, le spin serait lié à la structure propre de l'élément : on devrait donc voir apparaître, en même temps que le spin, le rayon des éléments. Or ce rayon, à supposer qu'on puisse le définir, est certainement très inférieur à $\frac{l_0}{2}$. Mais dans la mécanique quantique de la particule libre, les seules constantes de base (la charge n'intervenant pas) sont h, m_0, c, avec quoi on ne peut former d'autre longueur que l_0. Il paraît donc plus vraisemblable que le spin soit lié au globule; nous différons toute hypothèse sur la nature de cette liaison.

B. — Le moment cinétique et le rayon de giration du globule.

1. Étudions les propriétés cinétiques du globule, en adaptant le raisonnement qui donne, pour un fluide classique, le moment cinétique d'une sphère infinitésimale comme proportionnel au tourbillon.

Soit $R(\vec{\xi})$ la position aléatoire, au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$, d'un élément dont la position nominale $M(\vec{x})$ a été donnée au temps t. Dans le cadre de la théorie de la diffusion, l'élément brownien n'a pas de vitesse. Mais nous sommes ici au-dessous du seuil de la diffusion, nous admettrons que, dans le cas du fluide à spin, un effet rotationnel s'ajoute à l'expansion radiale uniforme, et donne une vitesse résultante $\vec{v}(\vec{\xi})$.

Plaçons-nous dans le système propre en M, et supposons que v admette des dérivées continues et bornées jusqu'au second ordre, dans une petite région entourant M. Dans cette région, pour $t' = t + \frac{\tau_0}{2}$ les vitesses resteront faibles. Or nous savons que les vitesses faibles du mouvement de translation moyen n'influencent pas la structure du fluide brownien. Nous admettrons qu'il en est de même pour les vitesses du mouvement rotationnel, et que nous pouvons donc écrire:

$$(16) \qquad \int (\xi_j - x_j)\,(\xi_l - x_l)\,\mathrm{P}\left(\vec{\xi},\ t + \frac{\tau_0}{2}\middle/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}\right) d\vec{\xi} = \frac{l_0^2}{4}\,\delta_{jl}$$

$$(17) \qquad \int (\xi_j - x_j)\,(\xi_l - x_l)\,(\xi_s - x_s)\,\mathrm{P}\left(\vec{\xi},\ t + \frac{\tau_0}{2}\middle/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}\right) d\vec{\xi} = 0 \times \tau_0^2.$$

Soit ijk une permutation paire de 1, 2, 3; le moment cinétique par rapport à M du globule aléatoire est donné par :

$$(18) \qquad \mathrm{L}_i = m_0 \int (\xi_j - x_j)\, v_k(\vec{\xi})\,\mathrm{P}\left(\vec{\xi}, t + \frac{\tau_0}{2}\middle/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}\right) d\vec{\xi} - m_0 \int (\xi_k - v_k)\, v_j(\vec{\xi})\,\mathrm{P}\left(\vec{\xi}, t + \frac{\tau_0}{2}\middle/\vec{\mathrm{X}}(t) = \vec{x}\right) d\vec{\xi}.$$

En portant dans (18) les développements tels que :

$$v_k(\vec{\xi}) = v_k(\vec{x}) + (\xi_l - x_l)\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2}(\xi_l - x_l)\,(\xi_s - x_s)\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial x_s}\,(\chi)$$

on a, par (16) et (17), au second ordre en τ_0 :

$$(19) \qquad \vec{\mathrm{L}} = \frac{m_0 l_0^2}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}.$$

Remarquons que le fluide associé aux équations quantiques est irrotationnel pour les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, rotationnel pour l'équation de Dirac. Si donc nous assimilons $\vec{v}$ à la vitesse du fluide quantique, nous avons une première confirmation du rôle rotationnel du spin.

2. Il faut maintenant schématiser le globule aléatoire tournant. On a schématisé le globule en translation en lui substituant un point fictif animé du mouvement moyen de translation $\lim_{\delta t \to 0} \overline{\frac{\delta \vec{x}}{\delta t}}$. Pour le

fluide de Dirac, il est naturel de considérer de même un mobile fictif qui subirait d'une part le mouvement moyen de translation, d'autre part la rotation locale (extérieure ou interne). Dans le système propre la rotation se présentera seule, et il est à présumer qu'elle se fera sur la sphère (Σ), qui est elle-même une image schématique du fluide autour d'un point. Nous allons vérifier qu'il en est ainsi, et que le schéma s'introduit de lui-même.

Soit autour de M une rotation définie par le vecteur $\vec{\Delta}$. Le moment d'inertie I du solide équivalent au globule est donné par

$$\vec{L} = I\vec{\Delta}. \tag{20}$$

Avec la représentation de Takabayasi du fluide de Dirac, la rotation du spin dans le système propre en M et en l'absence de champ est :

$$\vec{\Lambda} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} + c\vec{\nabla}\mathcal{A} \qquad \left(\mathcal{A} = + \text{arc tg}\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) \tag{21}$$

(Ω_1 et Ω_2 étant les deux invariants de Dirac).

Le deuxième terme de (21) est un effet secondaire dont il sera rendu compte dans l'annexe I. Comme par ailleurs le spin est supposé lié au globule, le premier terme de (21) devra être identifié avec $\vec{\Delta}$; d'où par (19) et (20) :

$$I = \frac{m_0 l_0^2}{4}. \tag{22}$$

Le rayon de giration du globule sous l'effet d'une rotation quelconque est donc le même que si toute la masse était concentrée en un point fictif décrivant la section de (Σ) par le plan normal à $\vec{\Omega}$.

S'il s'agit d'une rotation dirigée suivant le spin $\vec{S}$, la ligne décrite sera le cercle (Γ), section de (Σ) par le plan normal à $\vec{S}$. Si de plus on donne au point fictif P la vitesse c du mouvement des éléments libres, et un sens de rotation direct par rapport à $\vec{S}$, le vecteur spin, de grandeur $\frac{\hbar}{2}$, n'est autre que le moment cinétique orbital.

Considérant l'orbite définie par (Γ) et P, nous allons montrer que cette orbite est contenue dans l'équation de Dirac.

3. L'orbite (Γ) et l'équation de Dirac.

A. — Préliminaires.

a) *La représentation classique.*

Soit (E) une molécule d'un fluide. A l'approximation où cette molécule est localisable en un point $M(\vec{x})$ et sa vitesse déterminée, on peut définir à chaque instant t un système propre où (E) est immobile, et où toute grandeur q liée à (E) a une équation d'évolution de la forme $\frac{\partial q}{\partial t} = f(\vec{x}t)$.

La représentation $(\mathcal{R})$ est écrite à cette approximation : l'équation (5) $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{\Lambda} \wedge \vec{S}$, qui traduit les mouvements locaux du spin, est de la forme indiquée.

b) *La représentation du fluide brownien.*

Pour un fluide brownien l'élément (E) immobile et localisé en M est une fiction. On a une approximation supérieure en considérant autour de M une répartition de densité sur la sphère (Σ), schématisant la répartition réelle au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$. Au concept d'une variation temporelle $\frac{\partial q}{\partial t}$ de q en M devra être substitué celui d'une variation $\frac{Dq}{Dt}$ sur une certaine ligne $\mathcal{L}$ de (Σ), qu'on doit pouvoir choisir de manière qu'une correspondance puisse être établie entre les deux représentations.

c) *La correspondance entre les deux représentations.*

Pour le spin, en l'absence d'actions extérieures, la ligne $\mathcal{L}$ ne peut être que (Γ), par isotropie. On s'efforcera donc d'associer au mobile P un spin dont les variations satisferont à l'équation (5), où $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$ est remplacé par $\frac{D\vec{S}}{Dt}$ calculé en suivant le mouvement de P sur (Γ).

Nous appellerons $(\mathcal{R}_1)$ la représentation obtenue à partir de $(\mathcal{R})$ en faisant dans toutes les équations la substitution $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{D}{Dt}$ [suivant P sur (Γ)] : en particulier la rotation $\vec{\Lambda}$ du spin en M sera remplacée

par une rotation $\vec{\Lambda}_1$, qui devra être identifiée à la rotation $\vec{\lambda}$ du spin associé à P suivant une loi à préciser.

La loi la plus simple est celle qui définit le spin de P par les deux exigences suivantes :

(ε_1) Rencontrer le spin de M.

(ε_2) Faire avec lui un angle β dont la variation ait la période de la rotation orbitale.

Si ce choix est reconnu justifié, les éléments du modèle, ayant une période unique, fourniront le schéma d'une vibration élémentaire.

La justification du choix résulte du théorème suivant :

B. — Théorème justificatif.

Énoncé. — Le spin de P *étant défini par* (ε_1) *et* (ε_2), *sa rotation* $\vec{\lambda}$ *par unité de temps est, au premier ordre en* β, *identique à* Λ_1, *sous réserve que les variations spatiales et temporelles de la densité et de la vitesse soient négligeables.*

Cette condition s'éclairera plus loin, car nous montrerons que l'équation de Dirac cesse d'être valable si les grandeurs locales ont des variations finies sur l_0 et τ_0 : or cette longueur et cette durée sont respectivement de l'ordre du rayon et de la période du mouvement orbital.

Démonstration. — Le spin en M sera pris pour axe des z. Soient r et φ les coordonnées polaires d'un point de (Γ) : β l'angle du spin en P avec Mz : ω la vitesse angulaire de la rotation orbitale.

On a :

$$\beta = \beta_0 \cos\varphi \quad (\beta_0 = \text{constante}), \tag{23}$$

$$\omega = \frac{2c}{l_0}. \tag{24}$$

Les équations de ($\mathcal{R}_1$) seront désignées par les mêmes numéros que les équations correspondantes de ($\mathcal{R}$).

Notons d'abord qu'en raison de l'hypothèse sur la densité, (4) s'écrit :

$$\sin\alpha = \frac{l_0}{2}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu}. \tag{25}$$

D'autre part, du fait de l'hypothèse sur les variations des vitesses, nous négligeons le dernier terme de (15), qui devient :

$$\vec{G} = m_0\Omega_1\vec{v} + \operatorname{rot}\vec{S} + \frac{1}{c}\vec{S}\frac{D\alpha}{Dt}. \tag{26}$$

Calcul de $\vec{\Lambda}_1$.

On a (au 1er ordre) :

$$s_x = \beta \cos\varphi = \beta_0 \cos^2\varphi,$$
$$s_y = \beta \sin\varphi = \beta_0 \sin\varphi\cos\varphi, \qquad s_z = 1.$$

$\left(\text{La composante } s_4 = \frac{i}{c}\vec{v}.\vec{s} \text{ est nulle}\right)$.

La relation (25) montre que α est du premier ordre en β; nous pouvons donc remplacer (25) par

$$\alpha = \frac{l_0}{2}\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{l_0}{2}\operatorname{div}\vec{s} \tag{27}$$

(la dérivée temporelle de s_4 est négligeable en vertu des hypothèses sur la vitesse et l'accélération).

De (26) nous tirons $\vec{v}$ en fonction de $\vec{G}$ et prenons son rotationnel; au premier ordre en β, $\Omega_1 \sim \sigma$; de plus, par (10), rot. $\vec{G}$ est négligeable, car $\vec{D}$ est du second ordre. On obtient :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \frac{l_0}{2}\left[-c\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{s} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{s}\frac{D\alpha}{Dt}\right)\right].$$

D'où par (6) :

$$\vec{\Lambda}_1 = +\frac{l_0}{2}\left[c\,\Delta\vec{s} - \vec{\nabla}\frac{D\alpha}{Dt}\wedge\vec{s} - \frac{D\alpha}{Dt}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{s}\right]. \tag{28}$$

Au premier ordre $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{s}$ est suivant Mz, le dernier terme de (28) est colinéaire au spin et peut être supprimé; d'où :

$$\vec{\Lambda}_1 = \vec{\Lambda}'_1 + \vec{\Lambda}''_1 \tag{29}$$

avec :

$$\vec{\Lambda}'_1 = +c\frac{l_0}{2}\Delta\vec{s}, \tag{30}$$

$$\Lambda''_1 = -\frac{l_0}{2}\vec{\nabla}\frac{Da}{Dt}\wedge\vec{s}. \tag{31}$$

La formule du laplacien en coordonnées cylindriques (r, φ, z) est :

$$\Delta\vec{s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{s}}{\partial r} + \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial z^2}.$$

D'où pour $r = \frac{l_0}{2}$:

$$\Delta s_x = -\frac{8}{l_0^2}\beta_0\cos 2\varphi, \qquad \Delta s_y = -\frac{8}{l_0^2}\beta_0\sin 2\varphi, \qquad \Delta s_z = 0$$

et par (30)

$$(\vec{\Lambda}'_1)_r = -\frac{4c\beta_0}{l_0}\cos\varphi, \qquad (\vec{\Lambda}'_1)_\varphi = -\frac{4c\beta_0}{l_0}\sin\varphi, \qquad (\Lambda'_1)_z = 0$$

En appliquant la formule :

$$\operatorname{div}\vec{s} = \frac{1}{r}s_r + \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

avec $s_r = \beta$, $s_\varphi = s_z = 0$, on a par (27)

$$(32) \qquad \alpha = \frac{l_0}{2}\frac{\beta}{r} \quad (\text{sur } (\Gamma) : \alpha = \beta)$$

puis :

$$(33) \quad \frac{D\alpha}{Dt} = -\frac{l_0}{2r}\omega\beta_0\sin\varphi, \quad \vec{\nabla}\left(\frac{D\alpha}{Dt}\right)_r = \frac{l_0}{2r^2}\beta_0\omega\sin\varphi,$$

$$\left(\nabla\frac{D\alpha}{Dt}\right)_\varphi = -\frac{l_0}{2r^2}\omega\beta_0\cos\varphi \quad \left(\nabla\frac{D\alpha}{Dt}\right)_z = 0$$

(31) et (33) donnent alors :

$$(\Lambda''_1)_r = \omega\beta_0\cos\varphi, \qquad (\Lambda''_1)_\varphi = \omega\beta_0\sin\varphi.$$

On en déduit par (29)

$$(\Lambda_1)_r = -\frac{2\beta_0 c}{l_0}\cos\varphi, \qquad (\Lambda_1)_\varphi = -\frac{2\beta_0 c}{l_0}\sin\varphi \qquad (\Lambda_1)_z = 0$$

Calcul de $\vec{\lambda}$.

Nous cherchons la rotation par unité de temps du spin de P dans le mouvement orbital; elle a :

une composante $\lambda_\varphi = \frac{D\beta}{Dt} = \omega\frac{d\beta}{d\varphi} = -\frac{2c}{l_0}\beta_0\sin\varphi$;

une composante $\lambda_z = \omega$, qui se décompose :

— en $\omega\cos\beta$ suivant le spin de P (sans effet);

— en $\lambda_r = -\omega\operatorname{tg}\beta \sim -\omega\beta = -\frac{2c}{l_0}\beta_0\cos\varphi$;

on a bien $\vec{\Lambda}_1 = \vec{\lambda}$.

Remarque. — Au premier ordre :

$$(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{S})_x = (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{S})_y = 0, \qquad (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{S})_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial S_r}{\partial\varphi} = +\frac{\hbar\sigma}{2r}\beta_0\sin\varphi.$$

D'autre part, par (33)

$$\frac{1}{c}\vec{S}\left(\frac{D\alpha}{Dt}_x\right) = \left(\frac{1}{c}\vec{S}\frac{D\alpha}{Dt}\right)_y = 0,$$

$$\left(\frac{1}{c}\vec{S}\frac{D\alpha}{Dt}\right)_z = -\frac{\hbar}{2}\,\sigma\,\frac{\beta_0}{r}\sin\varphi$$

Dans (26) les deux termes complémentaires se compensent, et

$$(34)\quad \vec{G} = m_0\Omega_1\vec{v} \sim m_0\sigma\vec{v} \quad [\sim 0 \text{ (au voisinage de } (\Gamma)]$$

Calcul de l'énergie dans la rotation orbitale.

Dans l'énergie tous les termes correctifs sont du second ordre en β; c'est à cet ordre qu'il faut pousser l'approximation; (8) donne :

$$W = m_0\sigma c^2 - m_0c^2\sigma\frac{\mathcal{A}^2}{2} - \vec{S}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} - c\vec{S}\nabla\mathcal{A}.$$

Or par (34) et (10) :

$$\vec{S}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\hbar^2}{4\,m_0}\sigma s\vec{D}.$$

Le calcul montre [12] que

$$\vec{sD} = \sum_i (\nabla\vec{s}_i)^2 - (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{s})^2 - (\mathrm{div}\,\vec{s})^2.$$

Mais

$$(\vec{\nabla}s_x)^2 = \left(\frac{\partial s_x}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial\varphi}\right)^2 = \frac{\beta_0^2}{r^2}\sin^2 2\varphi;$$

$$(\nabla s_y)^2 = \left(\frac{\partial s_y}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial\varphi}\right)^2 = \frac{\beta_0^2}{r^2}\cos^2 2\varphi, \quad (\vec{\nabla}s_z)^2 = 0.$$

Donc $\Sigma(\vec{\nabla}s_i)^2 = \frac{\beta_0^2}{r^2}$; et comme

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{s})^2 = \frac{\beta_0^2}{r^2}\sin^2\varphi; \qquad (\overrightarrow{\mathrm{div}}\,s)^2 = \frac{\beta_0^2}{r^2}\cos^2\varphi$$

on en déduit :

$$\vec{S}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0.$$

On a ensuite :

$$-c\vec{S}\vec{\nabla}\mathcal{A} = m_0c^2\sigma\beta_0^2\cos^2\varphi, \qquad -m_0c^2\sigma\frac{\mathcal{A}^2}{2} = -\frac{m_0c^2}{2}\sigma\beta_0^2\cos^2\varphi.$$

Donc :

$$(35)\quad W = \sigma m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0c^2\sigma\beta_0^2\cos^2\varphi = \sigma m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0c^2\sigma\mathcal{A}^2.$$

On remarque que $\frac{W}{\sigma c^2}$ est, pour Ω_2 faible, la « masse variable » $M = m_0\sqrt{1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}$ qui a été introduite dans certains travaux récents, et qui représente la masse propre augmentée de l'énergie de la rotation interne.

4. La vibration élémentaire et l'onde quantique.

Le modèle que justifie et précise le théorème précédent comporte une fréquence unique (rotation orbitale et fluctuations du spin) qui est celle du tremblement de Schrödinger. Il définit une vibration élémentaire dont, au stade actuel, nous ne discutons pas la réalité physique : montrons seulement qu'on peut formellement en déduire le spineur de l'onde quantique.

Plaçons-nous d'abord à l'approximation de l'équation de Pauli, où le système est représenté par un spineur à deux composantes (θ_1, θ_2). On sait qu'un tel spineur se définit au moyen d'un vecteur isotrope T à trois dimensions, par les relations :

$$T_x = \theta_1^2 - \theta_2^2, \qquad T_y = i(\theta_1^2 + \theta_2^2), \qquad T_z = 2\theta_1\theta_2.$$

Prenons maintenant des axes d'orientation quelconque, et soient dans le plan de (Γ) deux vecteurs orthonormés fixes $\vec{\Xi}$ et $\vec{H}$; prenons deux autres vecteurs orthonormés $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$ tournant dans le même plan avec la vitesse angulaire ω. Le vecteur isotrope $\vec{T}$ pourra être pris égal à $\xi + i\eta$, car les relations $(\vec{\xi})^2 = (\eta)^2 = 1$, $\vec{\xi}.\vec{\eta} = 0$ donnent $(\vec{T})^2 = 0$.

Comme $\vec{T}$ peut alors s'écrire $\exp(-i\omega t)\ (\vec{\Xi} + i\vec{H})$, θ_1 et θ_2 contiennent le facteur $\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)$. Le spineur θ a donc la fréquence de Compton, et peut représenter la fonction d'onde à l'approximation de Pauli.

Dans le cas général, le fluide de Dirac est décrit par le spineur φ à quatre composantes. Un tel spineur se définit par un quadrivecteur isotrope T'_μ, par exemple par les relations suivantes (avec $l = ict$);

$$T'_x = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - (\varphi_3^2 - \varphi_4^2), \qquad T'_y = i(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - i(\varphi_3^2 + \varphi_4^2),$$
$$T'_z = 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3\varphi_4); \qquad T'_l = 2i(\varphi_1\,\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3)$$

On prendra dans le système propre $T'_i = \xi_i + i\eta_i$, $T'_l = 0$; l'une des quatre composantes de φ est arbitraire; si on la choisit proportionnelle à $\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)$, les trois autres composantes sont proportionnelles au même facteur, et l'on obtient encore une représentation de l'onde quantique.

5. Cas de l'équation de Pauli.

A. — La représentation de l'équation de Pauli.

La représentation $(\mathcal{R}_1)$ de l'équation de Pauli a d'abord été établie directement par plusieurs auteurs, à partir de cette équation, puis retrouvée par M. Hillion [12] comme limite non relativiste de $(\mathcal{R})$. Cette dernière méthode opère comme suit :

1° On néglige les termes de $(\mathcal{R})$ contenant c au dénominateur;

2° On développe au second ordre en α.

Sous réserve des termes négligés, $(\mathcal{R}')$ est de même forme que $(\mathcal{R})$; toutefois, en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{v}_1 = \vec{v} + \frac{1}{\sigma m_0} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{S}$, la densité d'énergie prend une forme nouvelle :

(36)
$$W = \sigma \left\{ m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\hbar^2}{8m_0} [(\vec{\nabla} s_x)^2 + (\vec{\nabla} s_y)^2 + \vec{\nabla} s_z)^2] \right\}.$$

Remarquons d'abord que par la première condition le terme $\frac{1}{c} \vec{S} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$ sera négligé dans l'équation (26) donnant $\vec{G}$, qui se confond alors avec $\sigma m_0 \vec{v}_1$.

Observons d'autre part l'apparition dans (36) du potentiel quantique, qui ne se manifestait pas dans $(\mathcal{R})$, — nous expliquerons plus loin (chap. X) pourquoi; notons seulement qu'ici les contributions à l'énergie des variations de la densité et du spin se séparent.

La contribution des variations du spin est le terme

$$W_1 = \sigma \frac{\hbar^2}{8m_0} [(\vec{\nabla} s_x)^2 + (\vec{\nabla} s_y)^2 + (\vec{\nabla} s_z)^2],$$

soit en abrégé

$$\sigma \frac{\hbar^2}{8m_0} (\vec{\nabla} s)^2.$$

que nous allons étudier.

B. — Étude du terme W_1. Les idées de MM. Bohm, Schiller et Tiomno [13].

Les auteurs susvisés ont signalé que W_1 s'interprète en fonction d'une valeur moyenne de la déviation du spin autour du point M choisi. La démonstration, qu'ils n'ont pas donnée, est facile à reconstituer.

En prenant l'axe des z comme axe polaire, soient γ et φ la colatitude et la longitude du spin en un point Q quelconque. On peut voir que :

$$W_1 = \frac{\hbar^2}{8m_0}\sigma[(\vec{\nabla}\gamma)^2 + \sin^2\gamma(\vec{\nabla}\varphi)^2].$$

Calculons ensuite la moyenne quadratique de l'angle $d\delta$ du spin $\vec{S}(M)$ avec $\vec{S}(Q) = \vec{S} + d\vec{S}$, dont les angles d'Euler sont $\gamma + d\gamma$ et $\varphi + d\varphi$. Pour les vecteurs unités $\vec{s}$ et $\vec{s} + d\vec{s}$ portés suivant les spins, on a :

$$\vec{s}, \qquad s_x = \sin\gamma\cos\varphi, \qquad s_y = \sin\gamma\sin\varphi, \qquad s_z = \cos\gamma$$
$$\vec{s'} = (\vec{s} + d\vec{s}), \qquad s'_x = \sin(\gamma + d\gamma)\cos(\varphi + d\varphi),$$
$$s'_y = \sin(\gamma + d\gamma)\sin(\varphi + d\varphi), \qquad s'_z = \cos(\gamma + d\gamma)$$
$$\cos d\delta = \vec{s}(\vec{s} + d\vec{s}) = \sin\gamma\sin(\gamma + d\gamma)\cos d\varphi + \cos\gamma\cos(\gamma + d\gamma)$$

soit au second ordre en $d\gamma$ et $d\varphi$

$$1 - \frac{(d\delta)^2}{2} = \cos d\gamma - \sin\gamma\sin(\gamma + d\gamma)\frac{(d\varphi)^2}{2} = 1 - \frac{(d\gamma)^2}{2} - \sin^2\gamma\frac{(d\varphi)^2}{2}$$

ou encore

$$(37) \qquad (d\delta)^2 = (d\gamma)^2 + \sin^2\gamma\,(d\varphi)^2.$$

Si la répartition des éléments du fluide autour de M reste, malgré l'effet de spin, isotrope (voir sur ce point II-B, 1 du présent chapitre) on pourra poser :

$$\overline{dx^2} = \overline{dy^2} = \overline{dz^2} = \lambda^2, \qquad \overline{dxdy} = \overline{dydz} = \overline{dydx} = 0$$

et l'on écrira, pour une grandeur L quelconque :

$$\overline{(dL)^2} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2\overline{dx^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2\overline{dy^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\overline{dz^2} = \lambda^2(\vec{\nabla}L)^2.$$

En appliquant cette relation à γ et à φ, on trouve par (37) :

$$\overline{(d\delta)^2} = \overline{d\gamma^2} + \sin^2\gamma\,\overline{(d\varphi)^2} = \lambda^2[(\vec{\nabla}\gamma)^2 + \sin^2\gamma\,(\vec{\nabla}\gamma)^2]$$

d'où :

$$(38) \qquad W_1 = \sigma\frac{\hbar^2}{8m_0}\frac{\overline{(d\delta)^2}}{\lambda^2}.$$

C. — Position du problème dans la conception aléatoire.

MM. Bohm, Schiller et Tiomno n'ont pas précisé sur quelle région les moyennes doivent être prises; il n'est pas évident qu'elle soit indifférente. Mais l'apparition de moyennes quadratiques nous incite à rattacher le calcul à la diffusion. La région sera alors l'espace entier, et les moyennes seront prises au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$; ainsi $\lambda = \frac{l_0}{2}$, et $\sqrt{\overline{(d\delta)^2}}$ est la moyenne quadratique β_0 de la déviation du spin à $t + \frac{\tau_0}{2}$.

Du fait de l'imprécision signalée, les auteurs n'avaient pu rendre compte quantitativement de l'expression (38). Mais on voit aussitôt que, le globule ayant par (22) un moment d'inertie $I = \frac{m_0 l_0^2}{4}$, a dans la rotation $\vec{\Lambda}$ par unité de temps une énergie $\frac{m_0 l_0^2}{8}\Lambda^2$. La déviation β_0 pouvant être associée à la durée $\frac{\tau_0}{2}$, on prendra $\Lambda = \frac{2\beta}{\tau_0}$, et l'on obtient :

$$\frac{W_1}{\sigma} = \frac{m_0 l_0^2}{8}\frac{4\beta_0^2}{\tau_0^2} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta_0^2$$

c'est-à-dire (38) où l'on a pris $\overline{(d\delta)^2} = \beta_0^2$ et $\lambda = \frac{l_0}{2}$.

On peut encore remarquer que la rotation orbitale sur (Γ) peut être représentée par un vecteur $\vec{\Omega}$ de grandeur $\omega = \frac{2c}{l_0}$, dirigé suivant le spin. Sous la déviation moyenne β_0 du spin, ce vecteur rotation prend une composante $\omega\beta_0 = \frac{2c\beta_0}{l_0}$ dans le plan normal au spin en M, d'où la même valeur $\frac{1}{2}\frac{m_0 l_0^2}{4}\cdot\frac{4c^2\beta_0^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta_0^2$ pour l'énergie cinétique.

D. — Observations.

a) Les auteurs précités ont remarqué que W_1 est minimale si les spins infiniment voisins sont parallèles. La position d'équilibre étant celle d'énergie minimale, une perturbation sur la direction du spin en un point tend à se transmettre au point voisin de manière que le parallélisme soit établi; on parvient ainsi au concept de l'onde de spin. Il est équivalent de considérer W_1 comme exprimant une interac-

tion entre les spins, qui permet la propagation des perturbations, ainsi que font les actions de rappel dans un milieu élastique (1).

b) L'oscillation du spin lié au point P décrivant (Γ) peut être rapprochée des conceptions ci-dessus, mais il faut préciser qu'elle ne se situe aucunement à la même échelle. Le terme $\frac{1}{c}\,\vec{S}\,\frac{D\vec{\alpha}}{Dt}$ dans (26), que néglige l'approximation de Pauli, est essentiel pour les calculs qui déterminent l'orbite. L'équation de Pauli ne peut définir que des mouvement du fluide à grande échelle : ceci est d'ailleurs compréhensible, car, — nous l'avons vu, — des variations locales sensibles à l'échelle de l_0 et τ_0 entraînent l'application de la relativité, et l'équation de Pauli n'est pas relativiste. Inversement l'équation de Klein-Gordon, qui est relativiste et sans spin, est satisfaite par les particules de spin 1/2 mais ne suffit pas à les décrire, — étant précisé qu'une équation « sans spin » ne signifie pas l'absence du spin, mais seulement l'absence de ses manifestations (le spin du fluide ayant des variations négligeables dans l'espace et dans le temps).

---

(1) L'idée de l'onde de spin s'était déjà présentée dans l'étude des substances ferromagnétiques (F. Bloch [14], Neel [15], Herring et Kittel [16]). Dans les couches de passage entre les domaines d'aimantation uniforme, s'exercent des forces d'échange entre les atomes dont les moments magnétiques ne sont pas parallèles; si $\delta\psi$ est leur angle, l'énergie potentielle du couple, étant proportionnelle au cosinus de l'angle, reçoit une variation proportionnelle à $(\delta\psi)^2$. La moyenne donne un complément d'énergie variant comme le carré de la moyenne quadratique de la déviation.

CHAPITRE X

LA DÉCOMPOSITION DU FLUIDE DE DIRAC-RELATIONS AVEC LA DIFFUSION.

1. Etude mathématique.

A. — La décomposition de Van der Waerden [12].

Les travaux de Van der Waerden [12], puis de Takabayasi montrent que le spineur de Dirac φ à quatre composantes se décompose en deux spineurs à deux composantes, Φ et ψ, de chiralités contraires.

Si en effet on pose : $\Phi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\varphi$; $\psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\varphi$, les grandeurs physiques σ, $\frac{\vec{j}}{m_0} = \sigma\vec{v}$ et $\vec{S}$ se séparent comme suit :

$$\sigma = \sigma_\Phi + \sigma_\psi \tag{1}$$

$$\sigma\vec{v} = \sigma_\Phi\vec{v}_\Phi + \sigma_\psi\vec{v}_\psi, \qquad (v_\Phi) = (v_\psi) = c \tag{2}$$

$$\vec{S} = \vec{S}_\Phi + \vec{S}_\psi = \frac{\hbar}{2c}(\sigma_\Phi\vec{v}_\Phi - \sigma_\psi\vec{v}_\psi); \tag{3}$$

ou encore

$$\vec{S}_\Phi = \frac{\hbar}{2c}\sigma_\Phi\vec{v}_\Phi; \qquad \vec{S}_\psi = -\frac{\hbar}{2c}\sigma_\psi\vec{v}_\psi. \tag{4}$$

Φ et ψ sont liés par les relations suivantes, où $\sum_i$ et $\sum_4$ sont les matrices de Pauli :

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\sum_4 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + \frac{i\,m_0 c}{\hbar}\psi = 0 \\ \frac{1}{c}\sum_4 \frac{\partial\psi}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \frac{i\,m_0 c}{\hbar}\Phi = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Remarquons que la figure géométrique obtenue en traçant les vecteurs $\sigma_\Phi\vec{V}_\Phi$ et $\sigma_\psi\vec{V}_\psi$ donne la longueur du quadrivecteur de spin; posons :

$$\frac{2\vec{S}}{\hbar} = \vec{\mu} \quad (|\mu| = \mu); \qquad \frac{\vec{j}}{m_0 c} = j' = \sigma\frac{\vec{v}}{c} \quad (|j'| = j');$$

soit α l'angle de $\vec{j}$ avec $\vec{S}$; on a :

$$\frac{\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi}{c} = \frac{\vec{\mu} + \vec{j}'}{2}, \qquad \sigma_\psi \frac{\vec{v}_\psi}{c} = \frac{\vec{j}' - \vec{\mu}}{2}$$

d'où :

$$4\sigma_\Phi^2 = j'^2 + \mu^2 + 2j'\mu \cos\alpha \tag{6}$$

$$4\sigma_\psi^2 = j'^2 + \mu^2 - 2j'\mu \cos\alpha \tag{7}$$

En soustrayant on a par (1) :

$$\sigma_\Phi - \sigma_\psi = \frac{j'_\mu \cos\alpha}{\sigma}, \qquad \sigma_\Phi + \sigma_\psi = \sigma.$$

Tirant σ_Φ et portant dans (6), on trouve :

$$\mu^2\left(1 - \frac{v^2 \cos^2\alpha}{c^2}\right) = \sigma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

soit, avec $\sigma_0 = \sigma\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ et $S_4 = \frac{i}{c}(\vec{v}.\vec{S})$.

$$S^2 + S_4^2 = \frac{\hbar^2}{4}\sigma_0^2 \tag{8}$$

Dans le système propre on retrouve : $|S| = \frac{\hbar}{2}\sigma_0$.

B. — Étude des invariants Ω_1 et Ω_2.

Vérifions que si Ω_2 n'est pas nul, les deux fluides ne peuvent être séparément conservatifs. On a en effet par (2), (3) et (IX-10) :

$$\Omega_2 = \frac{l_0}{2c}\left[\operatorname{div}(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi) - \operatorname{div}(\sigma_\psi \vec{v}_\psi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi - \sigma_\psi \vec{v}_\psi)}{\sigma}(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi + \sigma_\psi \vec{v}_\psi)\right]$$

soit, puisque le dernier terme du crochet est : $\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_\Phi - \sigma_\psi)$

$$\Omega_2 = \frac{\tau_0}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sigma_\Phi v_{\Phi_\mu}) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sigma_\psi v_{\psi_\mu})\right].$$

Si donc Ω_2 n'est pas nul, $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sigma_\Phi v_{\Phi_\mu})$ et $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\sigma_\psi v_{\psi_\mu})$, dont la somme est nulle par (2), ne peuvent être nuls; les deux courants ne peuvent satisfaire à la relation de conservation.

De plus on a, les dérivées $\frac{D}{Dt}$ étant prises suivant les éléments

φ ou ψ (de même que les variations du volume $d\vec{x}$ contenant un nombre défini d'éléments) :

$$\Omega_2\, d\vec{x} = \frac{\tau_0}{2}\left[\underset{\text{(suivant } \vec{v}_\Phi)}{\frac{D}{Dt}(\sigma_\Phi\, d\vec{x})} - \underset{\text{(suivant } \vec{v}_\psi)}{\frac{D}{Dt}(\sigma_\psi\, d\vec{x})}\right].$$

Posons :

$$(9)\qquad [\sigma'_\Phi\, d\vec{x}]_{(t)} = [\sigma_\Phi\, d\vec{x}]_{\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)} = \frac{\sigma}{2}\, d\vec{x} + \frac{\tau_0}{2}\frac{D}{Dt}(\sigma_\Phi\, d\vec{x})$$

(et de même pour ψ). Nous obtenons :

$$(10)\qquad \Omega_2 = \sigma'_\Phi - \sigma'_\psi.$$

Et comme $\sigma'_\Phi + \sigma'_\psi = \sigma$, la somme des deux dérivées $\frac{D}{Dt}$ étant nulle, on a :

$$(10\ bis)\qquad \sigma'_\Phi = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\Omega_2; \qquad \sigma'_\psi = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\Omega_2$$

d'où :

$$\sigma'_\Phi\sigma'_\psi = \frac{\sigma^2 - \Omega_2^2}{4} = \frac{\Omega_1^2}{4};$$

soit :

$$(11)\qquad \Omega_1 = 2\sqrt{\sigma'_\Phi\sigma'_\psi}.$$

Ainsi Ω_2 mesure la différence des densités rectifiées des deux flux, qui ont pour moyenne arithmétique $\frac{\sigma}{2}$, et pour moyenne géométrique $\frac{\Omega_1}{2}$; les relations (9) généralisent (V-14), σ'_Φ et σ'_ψ correspondant à ρ, tandis que σ_Φ et σ_ψ correspondent à ρ_0. L'analogie s'arrête ici, car le potentiel quantique n'apparaît pas hors de l'approximation de Pauli (voir chap. IX, et ci-après).

Ajoutons que Ω_1 est toujours positif, du fait que les lois de la diffusion suppriment les états d'énergie négative.

C. — L'orbite (Γ) et la décomposition du fluide.

1. *Étude dans le système propre.*

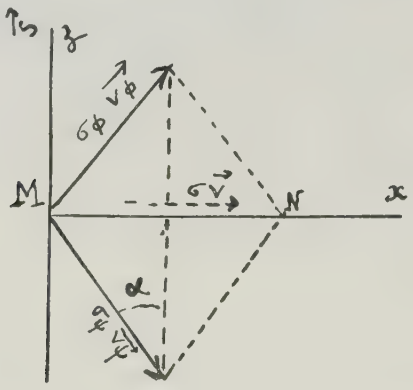
Si l'on convient d'associer à chaque flux une orbite de rayon $\frac{l_0}{2}$ coaxiale à son spin et parcourue dans le sens direct par rapport au spin, on voit que dans le système propre, (où $\vec{v}_\Phi = -\vec{v}_\psi$, donc $\vec{S}_\Phi = \vec{S}_\psi$) les orbites ($\Gamma_\Phi$) et ($\Gamma_\psi$) se confondent, ainsi que leurs sens de rotation.

On peut donc, à volonté, définir une orbite pour chaque fluide ou pour l'ensemble.

Nous démontrons à l'annexe I que le modèle constitué par (Γ) et par les deux flux antagonistes de vitesse c suivant l'axe de (Γ), permet, moyennant des hypothèses simples, de retrouver terme à terme la représentation ($\mathcal{R}$). Voir ci-après un commentaire de ce résultat.

2. *Étude en dehors du système propre.*

a) Supposons d'abord que la vitesse $\vec{v}$ de translation en M soit normale au spin. On voit sur la figure ci-dessous que les densités σ_Φ



et $\sigma_\downarrow$ sont égales à $\frac{\sigma}{2}$. L'angle α de chaque vitesse ($\vec{v}_\Phi$ ou $\vec{v}_\downarrow$) avec le spin satisfait à : $\sin\alpha = \frac{\sigma v}{\sigma c} = \frac{v}{c}$. C'est donc dans le cas relativiste que la déformation du modèle devient sensible.

Le rayon des orbites associées à chaque flux définit la dispersion des coordonnées d'un point aléatoire dont la position moyenne est en M. Ces orbites se projettent sur un plan normal à Mz suivant une même ellipse, dont le diamètre de petit axe, dirigé suivant v, est :

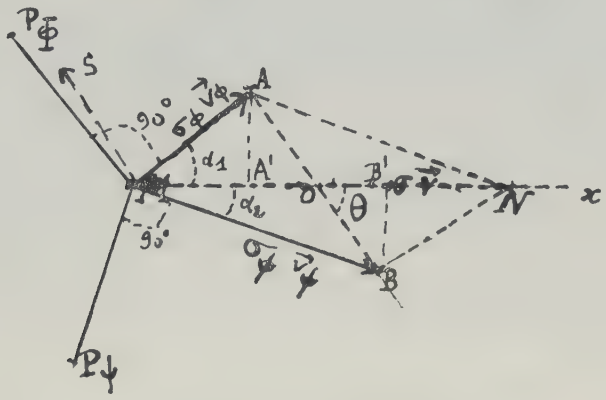
$$l = l_0 \cos\alpha = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Si nous admettons que, eu égard aux effets étudiés, cette projection commune a la même signification que précédemment l'orbite unique, la dimension $\frac{l}{2}$ représente, dans la direction Mx de la vitesse de trans-

lation, l'écart quadratique moyen du fluide animé d'un mouvement d'ensemble.

Ainsi nous retrouvons, par une voie indépendante, le résultat obtenu au chapitre VI : *la transformation des écarts quadratiques suivant la loi de Lorentz.*

b) Prenons le cas général; on a : $\sigma_\Phi \neq \sigma_\psi$. Dans le plan de la figure,



qui contient $\vec{S}$ et $\vec{v}$ (suivant Mx) les points P_Φ et P_ψ situés sur les deux orbites n'ont pas la même projection sur Mx. Leurs abscisses sont $x_\Phi = \frac{l_0}{2} \sin \alpha_1$ et $x_\psi = \frac{l_0}{2} \sin \alpha_2$. Mais si l'on pondère les deux abscisses on a $\sigma_\Phi x_\Phi = \sigma_\psi x_\psi$ (car AA′ = BB′ et $v_\Phi = v_\psi = c$). Nous imaginerons donc un fluide fictif dont l'écart quadratique X suivant Mx sera défini par : $\frac{\sigma}{2} X = \sigma_\Phi x_\Phi = \sigma_\psi x_\psi$.

Pour calculer X posons : $c = 1$, $v = \beta$. Soient

$$AA' = a; \qquad AO = b, \quad A'O = d \qquad \text{d'où} \qquad X = \frac{a}{\sigma} l_0;$$

le triangle AMB donne

$$(12) \qquad b^2 = \frac{\sigma_\Phi^2 + \sigma_\psi^2}{2} - \frac{\beta^2}{4}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{4}(1 - \beta^2) + \frac{(\sigma_\Phi - \sigma_\psi)^2}{4}.$$

Puis dans le triangle MAO on a :

$$\sigma\beta d = \frac{\beta^2}{4}\sigma^2 + b^2 - \sigma_\Phi^2 = \frac{\sigma\psi^2 - \sigma_\Phi^2}{2} = \frac{\sigma}{2}(\sigma_\psi - \sigma_\Phi)$$

D'où :

$$a^2 = b^2 - d^2 = \frac{\sigma^2}{4}(1 - \beta^2) + \frac{1}{4}(\sigma_\Phi - \sigma_\psi)^2\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right);$$

et enfin :

$$(13) \qquad X^2 = \frac{l_0^2}{4}(1-\beta^2)\left[1 - \frac{1}{\beta^2}\frac{(\sigma_\Phi - \sigma_\psi)^2}{\sigma^2}\right].$$

On retrouve le terme principal $\frac{l_0}{2}\sqrt{1-\beta^2}$, et une correction qui sera commentée ci-après.

Puisque $\sigma_\Phi - \sigma_\psi = 2\beta b \cos\theta$, on peut aussi, par (12), écrire en fonction de l'angle θ de la vitesse et du spin :

$$(\sigma_\Phi - \sigma_\psi) = \frac{\sigma^2\beta^2\cos^2\theta\,(1-\beta^2)}{1-\beta^2\cos^2\theta}.$$

et portant dans (13) :

$$(14) \qquad X^2 = \frac{l_0^2}{4}(1-\beta^2)\frac{\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}.$$

On retrouve la contraction de Lorentz pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le cas $\theta = 0$ correspond au neutrino, c'est-à-dire à $\beta = 1$; on a : $X = 0$, ce qui est trivial.

2. Commentaire physique.

A. — La décomposition du spineur de Dirac.

1. Examinons s'il est probable que cette décomposition traduise une réalité physique. En ce cas, le fluide de Dirac serait formé de deux fluides couplés, de vitesse c, de spin $\frac{\hbar}{2}$ respectivement parallèle et antiparallèle à la vitesse.

Or les interactions entre particules donnent une indication qui nous paraît assez nette. Les interactions faibles [19] se définissent généralement (1) par un terme d'interaction en $\varphi_a^+\gamma_4\gamma_\mu(1 \pm \gamma_5)\varphi_b$ c'est-à-dire en $\Phi_a^+\gamma_4\gamma_\mu\Phi_b$ ou $\psi_a^+\gamma_4\gamma_\mu\psi_b$. On a en effet par exemple) puisque $\gamma_5^+ = 1$ et $(1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)$

$$\Phi_a^+\gamma_4\gamma_l\Phi_b = \varphi_a^+\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma_4\gamma_l\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\varphi_b = \frac{\varphi_a^+}{2}\gamma_4\gamma_l(1-\gamma_5)\varphi_b$$

$$\Phi_a^+\Phi_b = \frac{\varphi_a^+}{2}(1-\gamma_5)\varphi_b.$$

Même calcul pour $\psi_a^+\gamma_4\gamma_\mu\psi_b$ en changeant γ_5 en $-\gamma_5$.

---

(1) On a en effet découvert récemment une interaction faible conservant la parité

$$\Sigma^+ = N + \pi^+.$$

Au contraire, pour les interactions fortes, on a un terme $\varphi_a^+\gamma_4\gamma_5\varphi_b$ qui s'écrit encore $(-\psi_a^+\gamma_4\Phi_b + \Phi_a^+\gamma_4\psi_b)$. En effet :

$$(-\psi_a^+\gamma_4\Phi_b + \Phi_a^+\gamma_4\psi_b)$$
$$= \left[-\varphi_a^+\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_4\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\varphi_b + \varphi_a^+\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma_4\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\varphi_b\right]$$
$$= \left[-\varphi_a^+\left(\frac{1+\gamma_5}{4}\right)^2\gamma_4\varphi_b + \varphi_a^+\left(\frac{1-\gamma_5}{4}\right)^2\gamma_4\varphi_b\right] = \varphi_a^+\gamma_4\gamma_5\varphi_b.$$

Ainsi *les interactions faibles ne font intervenir en général que des couplages entre flux de même chiralité, les interactions fortes des couplages entre flux de chiralités contraires.*

Pour essayer de comprendre pourquoi ces derniers sont les plus forts, on peut d'abord remarquer que la particule de Dirac résulte elle-même d'un tel couplage. Mais dans ce cas il s'agit d'une liaison avec vitesses antagonistes et spins parallèles. Si au contraire, dans les interactions entre particules, on admet l'accord des vitesses des flux couplés, on obtient la liaison à spins antiparallèles, dont la force est déjà démontrée.

Cherchons maintenant si les résultats trouvés sont en harmonie avec la diffusion.

Sur (5) la masse apparaît comme une constante de couplage entre les deux flux. Ceci est en accord avec la diffusion; en effet la longueur $l_0 = \frac{\hbar}{m_0 c}$, qui serait infinie pour un flux libre, devient finie par le couplage antagoniste qui augmente les chocs, ce qui crée une masse non nulle.

Les fluides composants ne sont pas conservatifs, car le fluide brownien ne l'est jamais avant rectification de sa vitesse; or ici la vitesse d'ensemble a seule subi cette rectification.

Les propriétés stochastiques du fluide global peuvent être supposées proportionnelles au produit des densités des fluides composants. La grandeur $\frac{\Omega_1}{2} = \sqrt{\sigma'_\Phi \sigma'_\psi}$ est donc la densité fictive qui, supposée répartie également entre les deux fluides, aurait au temps t les mêmes propriétés stochastiques que la répartition réelle au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$.

La grandeur Ω_2 exprime le déséquilibre entre les densités des deux fluides; il en est de même pour la grandeur $\mathcal{A}$; elles seront examinées plus loin.

B. — La représentation $(\mathcal{R})$.

Les calculs exposés à l'annexe I font ressortir les points suivants :

1° L'interprétation de $(\mathcal{R})$ n'est valable que pour $\sin\alpha \sim \alpha$, soit au maximum au second ordre en α, — ou encore en τ_0 [par IX-(27) si $\vec{s}$ a des dérivées finies].

2° Tous les termes traduisant des effets secondaires sont du premier ordre en τ_0, sauf pour l'énergie (en dehors des vecteurs J_μ et J'_μ qui ne sont pas des grandeurs physiques immédiates). Ceci d'ailleurs a son analogue dans la mécanique newtonienne, valable au premier ordre en $\frac{v}{c}$, et contenant néanmoins une énergie $\frac{1}{2} m_0 v^2$.

Comme $(\mathcal{R})$ est équivalente à l'équation de Dirac, celle-ci apparaît d'une validité approximative. Il faut que α ne soit pas trop grand, ni trop fortes les fluctuations des grandeurs locales à l'échelle de l_0 et de τ_0. Ainsi, bien qu'à cet égard elle se situe au degré supérieur à l'équation non relativiste, l'équation de Dirac a aussi son domaine limité.

La condition $\sin\alpha \sim \alpha$ confirme l'impossibilité physique des états d'énergie négative, caractérisés par des valeurs de α voisines de π; pour les obtenir à partir des valeurs de α voisines de zéro, on devrait passer par des états intermédiaires où l'équation de Dirac ne serait plus applicable.

Dans le mouvement orbital du point fictif P sur (Γ), nous avions trouvé $\beta = \alpha$; la grandeur α avait ainsi un caractère oscillatoire, et le schéma qui s'est dégagé comme solution particulière de l'équation de Dirac définit une fluctuation élémentaire portant à la fois sur le spin et sur les densités.

Pour un fluide libre, et loin des parois, il est permis de penser que les variations locales et temporelles des densités se réduisent à la fluctuation élémentaire, c'est-à-dire que Ω_2 et α sont des grandeurs oscillantes.

Le fait que α est lié aux densités aide à comprendre pourquoi le potentiel quantique n'est pas apparent dans $(\mathcal{R})$. Dans le mouvement de P sur (Γ) les variations des densités sont liées à celles du spin par la relation $\beta = \alpha$. Il est naturel d'en induire que plus généralement les variations du spin et des densités σ_Φ et σ_ψ (donc aussi de σ) sont imbriquées, alors qu'elles se séparent dans le cas de l'équation de Pauli (IX-36).

C. — L'altération du schéma par la vitesse de translation.

Elle sera commentée au chapitre XI. Notons seulement que les formules (13) et (14) donnent pour les écarts quadratiques une correction à la loi de Lorentz, du second ordre en θ ou en $\sigma_\Phi - \sigma_\psi$; si ces quantités sont faibles, la grandeur X pourra servir de définition conventionnelle d'un libre parcours dont la loi de variation serait celle de Lorentz. Cette loi ayant déjà été admise pour lui au chapitre VI, nous sommes amenés à penser que l'état normal du fluide est celui où les densités σ_Φ et σ_ψ sont presque équilibrées, et la vitesse presque perpendiculaire au spin.

CHAPITRE XI

STRUCTURE DES PARTICULES. ÉTATS QUANTIQUES

1. — Le schéma des deux flux et les grandeurs d'isoespace.

Il est naturel de chercher dans les lois de symétrie du modèle proposé une définition de la structure des particules.

Une telle recherche est particulièrement intéressante pour la charge et l'isospin : l'isomorphisme de l'espace réel et de l'isoespace, et les analogies de propriétés entre le spin et l'isospin, rendent en effet souhaitable une représentation spatiale des grandeurs d'isoespace, qui ferait perdre à celui-ci son caractère abstrait.

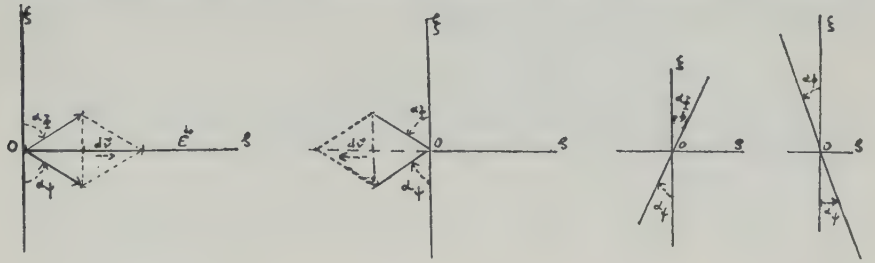
A. — La charge.

Soit à l'instant initial une particule au repos en O; étudions la modification du schéma (vitesse $d\vec{v}$ prise dans le temps dt) sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$ opérant suivant $O\zeta$. Pour un élément complexe $\left(\text{de spin} > \frac{1}{2} \text{ d'après la théorie de la fusion}\right)$, l'indépendance des caractères de spin et d'isospin nous autorise à considérer que les composantes de même chiralité se comportent solidairement vis-à-vis du champ; ainsi on assimilera l'élément complexe à un élément fictif formé d'un seul flux Φ et d'un seul flux ψ [1]. Admettant que la

[1] Sous réserve que l'isospin ne dépasse pas 1. — On peut imaginer aussi une fusion dans l'isoespace (Voir ci-après).

vitesse est normale au spin, nous aurons suivant la charge l'un des trois schémas suivants :

Schéma I (Charge $+ e$) Schéma II (Charge $- e$) Schéma III (neutre)



Nous pouvons donc associer à chacun des flux Φ et ψ un nombre ε (soit ε_Φ et ε_ψ), égal à $+ 1$ ou $- 1$ suivant que les déviations α_Φ et α_ψ sont de sens positif ou négatif. On aura ainsi :

Schéma I	Schéma II	Schéma III
$\varepsilon_\Phi = - 1$	$\varepsilon_\Phi = + 1$	$\varepsilon_\Phi = \varepsilon_\psi = \pm 1$
$\varepsilon_\psi = + 1$	$\varepsilon_\psi = - 1$	

soit, dans les trois schémas, pour la charge q :

$$(1) \qquad q = \frac{e}{2}(\varepsilon_\psi - \varepsilon_\Phi).$$

Pour le méson π, où la composante t_3 de l'isospin est q, la formule (1) donne un schéma du triplet d'isospin, qui exploite l'analogie formelle avec le triplet de spin.

En effet, de même que la théorie de la fusion définit la particule de spin 1 par deux paramètres (les composantes, suivant un axe choisi, des spins des deux constituants), la particule d'isospin 1 est ici définie par les deux paramètres ε_Φ et ε_ψ concernant chacun des flux constituants.

Par ailleurs l'axe $O\zeta$ peut être pris conventionnellement pour troisième axe d'un système $O\xi\eta\zeta$ dans l'espace réel, tout comme on fait jouer, pour définir les états de spin, un rôle particulier à l'axe Oz; et le triplet $(- 1, 0, + 1)$ pour $t_3 = t_\zeta = \frac{q}{c}$ correspond au même triplet pour s_z.

A première vue l'analogie peut sembler incomplète, parce que les composantes du spin suivant Ox et Oy paraissent avoir une définition physique que n'ont pas t_ξ et t_η. Mais la non commutation rend cette

vue toute théorique : si s_z est donné, s_x et s_y ne signifient plus rien. Nous montrerons d'ailleurs ci-après que le parallélisme s'étend aux opérateurs $S^2 = \sum_i s_i^2$ et $T^2 = \sum_i t_i^2$, et par là aux premières et secondes composantes du spin et de l'isospin.

B. — L'isospin (ou spin isobarique).

Une particule en interaction avec d'autres particules est soumise à un champ de contact, avec qui le même schéma qu'avec le champ électrique peut être construit; mais on supposera que les flux Φ et ψ de la particule ne sont pas nécessairement sensibles au champ (Voir observations ci-après). Si p est le nombre de flux sensibles, nous définirons le nombre d'isospin par $t = \frac{p}{2}$; p sera pair pour l'isoboson, impair pour l'isofermion (ou son antiparticule) ; les deux états possibles pour un flux donné (sensible ou insensible) seront appelés « isoétats ».

Une particule en contact est un fluide aléatoire tout comme un chaos de photons; il est donc naturel qu'on puisse déceler similairement une direction du champ de contact. Cette direction étant prise suivant $O\zeta$, nous définissons des nombres ε' similairement aux nombres ε, mais en ne comptant que les flux sensibles : pour de tels flux on prendra $\varepsilon' = \varepsilon$; pour les autres $\varepsilon' = 0$.

Nous posons en suite :

$$t_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon'_\psi - \varepsilon'_\Phi), \tag{2}$$

$$q = t_3 + \frac{u}{2} \tag{3}$$

ce qui redonne les principes de la classification de MM. d'Espagnat et Prentki [21].

On vérifie que si l'isospin est $\frac{1}{2}$, l'un des ε' étant nul et l'autre égal à ± 1, on a $t_3 = \pm \frac{1}{2}$; et comme $q - t_3 = \frac{\varepsilon_\psi}{2}$ ou $\frac{\varepsilon_\Phi}{2}$ on a $u = \pm 1$.

Suivant le signe de u, on dira que la particule est un isofermion ou un anti-isofermion.

La fusion de N isofermions donne une particule à N constituants actifs, qui peut être définie par son isospin $T = \frac{N}{2}$ et par la composante $T_3 = \Sigma t_3$, qui peut varier de $-\frac{N}{2}$ à $+\frac{N}{2}$. Comme il a été dit plus haut, la fusion des états d'isospin s'opère indépendamment de celle des états de spin.

C. — La conjugaison de charge. Le théorème CP$\mathcal{T}$.

Soient Σ_i les matrices de Pauli; adoptons pour les matrices de Dirac la représentation

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_i \\ \Sigma_i & 0 \end{vmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La conjugaison de charge (C) change alors, comme M. de Broglie l'a montré [20], le spineur de Dirac φ en $\gamma_2\varphi^*$, et les demi-spineurs Φ et ψ en

$$\Phi' = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right)\gamma_2\varphi^* = \gamma_2\psi^* \qquad \psi' = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right)\gamma_2\varphi^* = \gamma_2\Phi^*$$

(car γ_5 est réel).

On obtient :

$$\sigma'_\Phi = \Phi'^*\Phi' = \psi^*\psi = \sigma_\psi \qquad \sigma'_\psi = \psi'^*\psi = \Phi^*\Phi = \sigma_\Phi$$

$$\vec{v}'_\Phi = \Phi'^*\vec{\alpha}\Phi' = \psi\gamma_2\vec{\alpha}\gamma_2\psi^* = \psi^*\vec{\alpha}\psi = \vec{v}_\psi$$

(car $\alpha_1^* = \alpha_1$, $\alpha_2^* = -\alpha_2$, $\alpha_3^* = \alpha_3$).

De même $\vec{v}'_\psi = \vec{v}_\Phi$.

$$\vec{S}'_\Phi = i\frac{\hbar}{2}\Phi'^*\gamma_5\gamma_4\vec{\gamma}\Phi' = i\frac{\hbar}{2}\psi\gamma_2\gamma_5\gamma_4\vec{\gamma}\gamma_2\psi^* = -i\frac{\hbar}{2}\psi^*\gamma_5\gamma_4\vec{\gamma}\psi = -\vec{S}_\psi.$$

De même

$$\vec{S}'_\psi = -\vec{S}_\Phi$$

$$\Omega'_1 = \Phi'^*\gamma_4\psi' + \psi'^*\gamma_4\Phi' = \psi\gamma_2\gamma_4\gamma_1\Phi^* + \Phi\gamma_1\gamma_4\gamma_2\psi' = -\Omega_1$$

$$\Omega'_2 = i\,\psi'^*\gamma_4\gamma_5\Phi' + i\,\Phi'^*\gamma_4\gamma_5\psi' = i\,\Phi\gamma_2\gamma_4\gamma_5\gamma_2\psi^* + i\,\psi\gamma_2\gamma_4\gamma_5\Phi^* = -\Omega_2$$

(car $(\gamma_4\gamma_5)^* = -\gamma_4\gamma_5$].

La conjugaison de charge correspond donc à l'échange des densités et des vitesses liées à chacun des deux flux, ceux-ci conservant leurs chiralités propres (d'où une inversion de la rotation orbitale, traduite par la transformation du spin). La même règle est valable pour les paramètres liés à la charge et à l'isospin, puisque les échanges

$$\varepsilon_\psi \rightleftarrows \varepsilon_\Phi \qquad \text{et} \qquad \varepsilon'_\Phi \rightleftarrows \varepsilon'_\psi$$

donnent bien $q \to -q$ et $t_2 \to -t_3$, comme on le voit sur les relations (1) et (2).

Le changement de signe de Ω_2 s'explique par l'échange des densités; celui de Ω_1 n'a pas de signification physique dans notre modèle, où Ω_1 n'est défini physiquement que par son carré. D'après les observations du chapitre VIII (I-A), le passage à un « état de masse négative » n'a qu'une valeur de commodité formelle.

Théorème CP$\mathcal{T}$.

L'effet de l'inversion d'espace (P) pourrait être évalué au moyen de la transformation $\varphi \to \gamma_4\varphi$, mais il est plus simple de raisonner sur le schéma. L'inversion (P) change les signes des vitesses, et conserve les moments de rotation. Ceci est valable pour chaque flux, qui subit d'autre part une modification de chiralité. On a donc $\sigma_\Phi \rightleftarrows \sigma_\psi$; $v_\Phi \rightleftarrows -v_\psi$, $\vec{S}_\Phi \rightleftarrows \vec{S}_\psi$. La symétrie donne en outre $\varepsilon_\Phi \rightleftarrows -\varepsilon_\psi$; $\varepsilon'_\Phi \rightleftarrows -\varepsilon'_\psi$; d'où $q \to q$, $t_3 \to t_3$.

L'inversion de temps ($\mathcal{T}$) change à la fois, sur chaque flux, le sens de la vitesse de translation et celui de la rotation orbitale; il y a donc conservation des chiralités. Dans les schémas I, II et III qui définissent la charge, la transformation $dt \to -dt$ équivaut à une symétrie par rapport à Oξ; les nombres ε et ε' se changent donc en leurs opposés, d'où $q \to -q$; $t_3 \to -t_3$. On retrouve l'idée de M. Feynman, qui considère l'antiparticule comme une particule qui remonte le temps.

Les effets du produit CP$\mathcal{T}$ se déduisent du tableau ci-dessous; où $\varkappa$ désigne indifféremment Φ ou ψ :

	Densités	Vitesses	Spin	Rotation orbitale	ε	ε'	q	t_3
(C)	$\sigma_\Phi \rightleftarrows \sigma_\psi$	$v_\Phi \rightleftarrows v_\psi$	$\vec{S}_\Phi \rightleftarrows -\vec{S}_\psi$	inversée	$\varepsilon_\Phi \rightleftarrows \varepsilon_\psi$	$\varepsilon'_\Phi \rightleftarrows \varepsilon'_\psi$	$q \to -q$	$t_3 \to -t_3$
(P)	$\sigma_\Phi \rightleftarrows \sigma_\psi$	$v_\Phi \rightleftarrows -v_\psi$	$\vec{S}_\Phi \rightleftarrows S_\psi$	conservée	$\varepsilon_\Phi \rightleftarrows -\varepsilon_\psi$	$\varepsilon'_\Phi \rightleftarrows -\varepsilon'_\psi$	$q \to q$	$t_3 \to t_3$
($\mathcal{T}$)	$\sigma_\varkappa \to \sigma_\varkappa$	$v_\varkappa \to -v_\varkappa$	$S_\varkappa \to -S_\varkappa$	inversée	$\varepsilon_\varkappa \to -\varepsilon_\varkappa$	$\varepsilon'_\varkappa \to -\varepsilon'_\varkappa$	$q \to -q$	$t_3 \to -t_3$
(CP$\mathcal{T}$)	$\sigma_\varkappa \to \sigma_\varkappa$	$v_\varkappa \to v_\varkappa$	$S_\varkappa \to S_\varkappa$	conservée	$\varepsilon_\varkappa \to \varepsilon_\varkappa$	$\varepsilon'_\varkappa \to \varepsilon'_\varkappa$	$q \to q$	$t_3 \to t_3$

Sur chacune des grandeurs du schéma, le produit CP$\mathcal{T}$ compense les effets des opérations successives; le théorème CP$\mathcal{T}$ est donc démontré, sous la réserve que le schéma soit complet.

D. — Observations.

1. Pourquoi les interactions fortes conservent-elles seules l'isoétat? On pourrait admettre que la stabilité de l'isoétat soit assurée par les couplages entre fluides. Les interactions détruisent les couplages browniens entre les deux fluides composants de chaque particule, et les remplacent par des couplages d'interaction. Or tous les fluides sont couplés dans les interactions fortes de type courant (terme en

$\bar{\varphi}_a\gamma_5\varphi_b$) alors que dans les interactions faibles de type courant (terme en $\bar{\varphi}_a\gamma_\mu(1 \pm \gamma_5)\varphi_b$) une chiralité reste libre, qui peut changer d'isoétat

2. Dans les interactions faibles, p paraît varier d'un nombre impair. On le comprendrait si le changement d'isoétat s'accompagnait d'un changement de parité; car alors la variation impaire serait commandée par la variation de la parité.

3. Il faudrait discerner pourquoi la sensibilité des fluides n'est pas la même dans le champ de contact, où certains constituants sont neutralisés, et dans le champ électromagnétique où ils ne le sont pas. Il est possible que l'étude comparative fasse intervenir les phases; voici quelques indications en ce sens :

— l'isomorphisme entre l'espace réel et l'isoespace, où l'on obtient des relations formelles entre les phases et les grandeurs d'isoespace;

— la disparition de l'invariance de jauge dans les interactions électromagnétiques, dès que la masse des photons n'est plus nulle; (or nous donnons ci-dessous des raisons contre la nullité de cette masse);

— la vraisemblance (voir 3 ci-dessous) que les interactions fassent intervenir des couplages de spins; or pour P donné sur (Γ) la phase de l'onde définit β, c'est-à-dire la position du spin.

La sensibilité d'un constituant pourrait alors être liée à une cohérence de phases. Les éléments qui forment le champ électromagnétique se trouvant loin des charges qui les ont émis, doivent présenter une grande diversité de phases, ce qui donnerait à une particule des possibilités de résonance pour chacun de ses fluides constituants. Au contraire, dans les interactions de contact, les phases sont bien définies, et pourraient, suivant leur structure, s'adapter ou non au champ ambiant.

4. Les lois de conservation s'expliqueraient en supposant que l'interaction, rompant les couplages entre les constituants de chaque particule, les assemble en un fluide unique, qui conserverait sa structure dans la transformation. Les nombres baryoniques et fermioniques opposés traduiraient, relativement à un élément de base, des orientations opposées.

2. Les états quantiques d'une particule libre.

Notre fluide ne comporte pas encore la quantification; de celle-ci il faut tenter une approche physique. Nous étudierons d'abord les états quantiques des opérateurs de spin.

A. — États quantiques du spin.

1. Dans la théorie de la fusion, une particule de spin effectif S est formée de 2S constituants libres de spin $\frac{1}{2}$, entre lesquels les composantes de spin s'ajoutent algébriquement. (La conception de M. L. de Broglie [23] pose de plus un nombre P de spin maximum, S prenant les valeurs positives entières ou demi-entières jusqu'à P. Il est loisible d'imaginer que, le nombre total de constituants étant 2P, des liaisons solidaires entre paires puissent réduire à 2S le nombre de constituants concourant au spin effectif.

2. Dans le fluide, le spin par élément a une grandeur constante; à ceci doit se rattacher la constance des valeurs mesurées pour les composantes du spin.

Disposons un appareil permettant la mesure de la composante s_i du spin suivant l'axe $(\vec{X}_i)$. On admettra que l'appareil oriente les spins des constituants suivant $(\vec{X}_i)$ ou $-(\vec{X}_i)$; on doit alors ajouter algébriquement des nombres égaux à $\pm\frac{1}{2}$.

Cette idée permet de comprendre la non-commutation des composantes : les expériences de mesure sont différentes, et incompatibles du fait des orientations sélectives.

3. Nous devons ensuite chercher la signification de la valeur propre $S(S+1)$ de l'opérateur $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$ (σ_i étant l'opérateur correspondant à s_2).

Il commute avec chaque composante; il est naturel de supposer que pendant la mesure de l'observable s^2 lié à σ^2, les composantes prennent le même nombre de fois chacune des valeurs permises. Tout se passera comme si l'appareil qui mesure s^2 se décomposait en trois appareils effectuant chacun un nombre égal de mesures de la composante correspondante, ces mesures donnant toutes les valeurs permises avec la même probabilité, et constituant par leur moyenne la mesure de s^2.

Cas des bosons.

La valeur moyenne du carré d'une composante est :

$$\frac{1}{2S+1} \times 2(1^2 + 2^2 + \cdots + S^2) = \frac{1}{3} S(S+1)$$

et l'on trouve bien pour s^2 la valeur moyenne : $S(S+1)$.

Cas des fermions.

Posons $S = \frac{2n+1}{2}$; nous obtenons pour la valeur moyenne du carré d'une composante :

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{4}[1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2] = \frac{1}{12}(2n+1)(2n+3)$$

soit pour s^2 :

$$\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3) = S(S+1).$$

B. — États quantiques de l'isospin.

Les raisonnements développés plus haut, concernant l'isomorphisme entre le spin et l'isospin, permettent de retrouver de la même manière les valeurs propres de $t^2 = \Sigma t_i^2$; le champ de contact jouera le même rôle que ci-dessus le champ magnétique.

Un champ de contact est assimilable à un appareil de mesure de t_3. Mesurer au contraire les valeurs propres de Σt_i^2, c'est prendre une moyenne sur un nombre d'opérations où le champ reçoit des orientations variables avec la même probabilité, et le calcul qui nous a donné plus haut $S(S+1)$ pour les valeurs propres de S^2 s'adapte sans modification.

3. Les états stationnaires de l'atome d'hydrogène.

Si l'électron est lié, un élément de son fluide est soumis :

A) aux actions browniennes des autres éléments;

B) aux actions du champ électrostatique.

Nous allons obtenir les nombres quantiques et les énergies des états stationnaires en admettant :

I) que les deux actions ci-dessus sont indépendantes;

II) que les éléments (E) du fluide électronique sont « habillés » d'éléments ($\mathfrak{L}$) de type photonique, de manière à former un ensemble complexe (Λ) à n éléments entre lesquels les effets (B) se répartissent également (sous une réserve que nous introduirons en son temps).

Première approximation. Effets de spin négligés en totalité.

Soit x l'une des coordonnées. (L'absence de discrimination entre elles sera justifiée ci-après); Appelons X le déplacement aléatoire

d'un élément du fluide électronique; nous poserons :

$$X = X_1 + X_2 \tag{4}$$

en nommant X_1 et X_2 les déplacements aléatoires (pendant la durée τ_0) dus respectivement aux effets (A) et (B). D'après l'hypothèse I on a (chap. I, éq. 5 bis, puisque $\overline{X}_1 = 0$)

$$\overline{X}^2 = \overline{X}_1^2 + \overline{X}_2^2 = l_1^2 + l_2^2 \tag{5}$$

(avec $l_1 = \sqrt{\overline{X}_1^2}$, $l_2 = \sqrt{\overline{X}_2^2}$).

Par (I) $l_1 = l_0$, et par (II) on pourra écrire

$$l_2 = \frac{l'_2}{n} \tag{6}$$

(ce qui revient à dire que l'énergie $\frac{\hbar c}{l_2}$ de (A) sous l'effet (B) s'obtient en ajoutant les n énergies $\frac{\hbar c}{l'_2}$ qu'aurait chaque constituant s'il était seul).

En posant :

$$l'_2 = \alpha l_0 \tag{7}$$

on obtient : (avec $\overline{X}^2 = L^2$)

$$L^2 = l_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right). \tag{8}$$

L'énergie W est :

$$W = \frac{\hbar c}{L} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

soit au second ordre en α :

$$W = m_0 c^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 m_0 c^2}{n^2} = m_0 c^2 - \frac{2\pi\hbar R}{n^2}$$

avec

$$R = \frac{m_0 \alpha^2 c^2}{4\pi\hbar}.$$

On obtient pour R la constante de Rydberg et pour l'énergie la valeur classique à l'approximation de Bohr, si l'on choisit $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, ce qui donne une interprétation physique de la constante de structure fine : elle définit, par (7), l'équivalence brownienne du champ électrostatique. Ainsi apparaît un parallélisme entre les développements en puissances de $\hbar$ et les développements en puissance de α. De plus, la validité de l'équation de Dirac suppose τ_0 (ou $\hbar$) petit (chap. X); elle doit supposer aussi α petit (voir ci-dessous remarque 1).

DEUXIÈME APPROXIMATION. EFFETS DE SPIN ADMIS.

Nous appliquons la théorie de la fusion à l'ensemble complexe (Λ). (1 élément de spin $\frac{1}{2}$ et $n-1$ éléments de spin 0 ou 1 suivant les couplages internes des constituants photoniques).

1) *Nombres quantiques définissant les états stationnaires.*

On décomposera le moment de rotation propre M de (Λ) en deux moments M_1 et M_2, M_2 étant le moment propre de (E); le moment propre M_1 des éléments (P), en tant qu'il est égal à $M - M_2$, se substitue donc au moment orbital de l'ancienne théorie [1].

Premier stade. Spin électronique négligé (équation de Schrödinger).

Il n'est pas tenu compte de M_2.

Avec les notations ci-dessus (**2**-A-1), on prendra : $P = n - 1$, $S = l$, d'où pour l (nombre d'éléments photoniques de spin 1, les $P - l$ autres ayant pour spin 0), des valeurs entières allant de 0 à $n - 1$; puis pour μ (valeurs possibles, en unités $\hbar$, d'une composante du moment de rotation suivant un axe), $2l + 1$ valeurs allant de $-l$ à $+l$.

Le carré du moment cinétique total a pour valeur propre $l(l+1)$ comme montré en **2**-A-1 ci-dessus.

Deuxième stade. Tous spins admis (équation de Dirac).

En ajoutant (E) parmi les éléments concourant au spin, on a au total pour le spin maximum :

$j = l + \frac{1}{2}$ si (E) est libre;

$j = l - \frac{1}{2}$ (si (E) est soumis à un couplage à spins contraires avec l'un des l autres éléments [2].

On en déduit pour μ des valeurs à différence entière allant de $-j$ à $+j$, ce qui est conforme à l'équation de Dirac, où les nombres quantiques sont n, l, j et m $\left[\text{avec } \mu = -\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$.

(1) Les orbites qui représentent le spin du photon ont une certaine analogie avec des orbites de Bohr, $\frac{\hbar}{m_0 c}$ étant grand pour le photon.

(2) Cette dernière expression n'est pas valable pour $l = 0$, mais comme elle donnerait $j = -\frac{1}{2}$, et comme j n'intervient que dans la suite $-j, \ldots, +j$ des valeurs de μ, il n'y a aucun inconvénient à la conserver formellement.

2) *Valeur de l'énergie.*

Il faut maintenant distinguer :

α) l'action microscopique de l'appareil mesurant une composante de spin, qui a les caractères classiques de quantification, et où les constituants ont le poids de leur nombre de spin.

β) l'interaction microscopique de spin [1] entre éléments individuels, où les caractères particulaires doivent prédominer. L'élément (P) comptera pour 1 s'il est de spin 1, pour 0 s'il est de spin 0. L'élément (E), solidaire par couplage d'un élément (P) de spin 1, forme avec lui une particule unique. Le nombre γ d'éléments actifs de (π) est $l+1$ ou l suivant que (E) est libre ou couplé, ce qui donne dans les deux cas :

$$\gamma = j + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Nous calculons l'énergie sur les effets du type β), et la distinction admise se confirme en constatant que le nombre m, strictement lié à des effets du type α), n'intervient pas dans l'énergie.

Par analogie avec les hypothèses I et II, les actions β) sont supposées indépendantes des actions A et B, et réparties également entre les γ éléments actifs. On écrira donc, pour le déplacement aléatoire X_3 a substituer à X_2 pour ces éléments : $X_3 = X_2 + X_4$, X_4 étant l'effet des actions de spin. On aura alors $\left(\text{avec } l_3^2 = \overline{X_3^2},\ l_4^2 = \overline{X_4^2} \text{ et } l_4 = \frac{l_4'}{\gamma}\right)$.

$$l_3^2 = l_2^2 + \frac{l_4'^2}{\gamma^2}. \tag{10}$$

En posant :

$$l_4' = \alpha' l_3 \tag{11}$$

on trouve :

$$l_2^2 = l_3^2\left(1 - \frac{\alpha'^2}{\gamma^2}\right). \tag{12}$$

L'hypothèse II [et la relation (6) qui en résulte] ne peut plus être conservée, les n éléments n'étant plus homogènes. Pour poser une hypothèse équivalente, nous devrons remplacer les γ éléments par γ'

[1] Sans faire d'hypothèses précises sur cette action, il est permis de penser que les mouvements dus au spin, et schématisés par la rotation orbitale, créent des possibilités de choc complémentaires entre les éléments où ces mouvements ne sont pas neutralisés par couplage, et que dans ces actions ils ont tous le même poids.

éléments fictifs qui permettent d'écrire à nouveau une formule analogue à (6). Nous prendrons

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{l_2}{l_3} \tag{13}$$

relation qui pour $n = \gamma$, change bien l_2 en l_3 si dans (6) on change γ en γ'.

Posant $p = n - \gamma$, on remplacera (8) par :

$$L'^2 = l_0^2\left[1 + \frac{\alpha^2}{(p+\gamma')^2}\right]$$

soit par (9), (12) et (13) :

$$L'^2 = l_0^2\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left[p + \left(j+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{\alpha'^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}}\right]^2}\right]$$

d'où l'énergie :

$$W' = \frac{hc}{L'} = m_0c^2\left[1 + \frac{\alpha^2}{\left[p + \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha'^2}\right]^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

L'expression est identique avec celle donnée par l'équation de Dirac, si l'on pose $\alpha' = \alpha = \frac{e^2}{hc}$.

Remarques.

1) L'égalité de α' et de α serait plus naturelle si au lieu de (11) on avait par analogie avec (7), posé $l_4' = \alpha' l_2$. Mais la différence sur l'énergie $\left(\text{avec } \alpha' = \frac{e^2}{hc}\right)$ est du sixième ordre en α. Le calcul donne pour cette difiérence une valeur de quelques mégacycles, largement noyée dans l'effet Lamb pour l'état initial 2S, dans la largeur des raies pour l'état initial 2P. La formule classique :

$$W' = m_0c^2 - \frac{2\pi\hbar R}{n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

dérive d'un développement au quatrième ordre en α, et s'obtient donc indifféremment avec les deux définitions.

2) La démonstration ci-dessus repose sur l'isotropie; celle-ci est réalisée dans la première approximation, l'anisotropie apparaissant avec le spin, c'est-à-dire avec les γ constituants actifs. Les γ constituants fictifs équivalents doivent être supposés définis de manière à substituer à la distribution anisotrope une distribution isotrope moyenne.

Commentaire.

1) Un fluide photonique étant un ensemble d'éléments ($\mathfrak{P}$), son émission s'explique par le passage de l'électron d'un état quantique (n) à un état quantique (n'), avec $n' < n$, chaque élément du fluide électronique envoyant au photon $n - n'$ éléments ($\mathfrak{L}$) — De même pour l'absorption.

2) Les éléments ($\mathfrak{L}$) qui « habillent » l'électron méritent bien leur nom de « photons virtuels ». Il constituent en effet une virtualité de former un photon en se rassemblant. Ceci est conforme aux réserves formulées au chapitre VIII (1-B), quant à la réalité physique des particules virtuelles. En particulier les échanges de « photons virtuels » entre deux corpuscules chargés paraissent être des échanges d'éléments ($\mathfrak{L}$) ne constituant un photon que par assimilation statistique. C'est donc statistiquement que le formalisme de l'émission virtuelle, défini par la théorie quantique des champs, aurait une signification physique, ce qui expliquerait la non-conservation de l'énergie dans chacun des processus élémentaires de ce formalisme [1].

3) Les règles de sélection $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $\Delta m = \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ montrent qu'une transition entraîne toujours une inversion de spin sur l'un des demi-photons des éléments ($\mathfrak{L}$), avec compensation possible sur l'ensemble ($\mathfrak{L}$) + (E).

Soit un atome dans l'état fondamental ($l = 0$), qui passe à l'état excité sous le choc d'une particule (Θ). Puisque l prend la valeur + 1, le choc de (Θ) a provoqué une inversion de spin dans l'ensemble ($\mathfrak{L}$). Ceci rendrait assez plausible que les interactions entre particules soient liées à des couplages de spins, ce qui nous ramène, comme exposé plus haut, à l'idée d'un rôle joué par la phase.

---

[1] La largeur des raies spectrales suggère que le processus qui vient d'être décrit ne serait lui aussi rigoureux que statistiquement. Il faudrait une émission de durée infinie pour que la probabilité d'une fréquence différente de la fréquence médiane devienne nulle.

4. Le cas des particules de masse nulle (ou quasi nulle).

A. — Le neutrino.

Le neutrino a tous les caractères d'un fluide ψ, l'antineutrino ceux d'un fluide Φ ; il est naturel d'admettre qu'ils soient effectivement constitués par ces fluides. L'existence de plusieurs types de neutrinos montre seulement que le modèle n'épuise pas la structure des particules.

B. — Le photon.

Dans la théorie de la fusion de M. Louis de Broglie [20], le photon est formé de deux particules de Dirac. L'annulation (ou quasi annulation) de la masse conduit à admettre la cessation du couplage entre fluides antagonistes. Ainsi la transformation de matière en énergie paraît traduire simplement un changement du mode de couplage : au lieu du couplage antagoniste qui ralentit la vitesse et crée la masse par effet brownien, il apparaît un couplage avec solidarité du mouvement, d'où une masse nulle (ou quasi nulle) et une vitesse égale (ou presque égale) à c. Les possibilités de couplage (Φ, Φ), (ψ, ψ), (Φ, ψ) rendent compte des trois états du photon.

C. — Le problème de la valeur de la masse.

Pour le photon comme pour le neutrino, la quasi annulation de la masse paraît plus vraisemblable que l'annulation totale; celle-ci entraînerait en effet :

a) une rotation orbitale nulle, ce qui ferait perdre au spin son support physique,

b) la disparition complète des chocs, la vitesse des éléments étant rigoureusement la vitesse de parcours libre. Or s'il est naturel que les chocs entre éléments animés d'un même mouvement d'ensemble soient beaucoup moins nombreux qu'entre fluides antagonistes, il paraît improbable que dans le cas d'un mouvement d'ensemble homogène le caractère brownien s'efface entièrement. De plus la signification brownienne de l'énergie s'évanouirait aussi, alors que dans le cas contraire elle reste définie par $E = \frac{hc}{l}$ (et la fréquence par $\frac{c}{2\pi l}$), l étant le libre parcours contracté dans la direction du mouvement $\left(l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$.

QUATRIÈME PARTIE

EXAMEN CRITIQUE ET SUGGESTIONS ANNEXES

CHAPITRE XII

EXAMEN CRITIQUE ET SUGGESTIONS

1. Sur la relation des résultats obtenus avec les bases physiques de la mécanique quantique.

A. — L'ambivalence du fluide brownien.

Nous avons laissé en suspens la nature du fluide brownien : est-ce un fluide réel, ou un fluide fictif donnant les répartitions de probabilité d'un élément ?

La deuxième partie est à cet égard ambivalente. On peut concevoir la densité comme réelle ou probabiliste, et la vitesse $\vec{u}$ comme vitesse moyenne ou vitesse probable. L'orbite définie au chapitre IX présente la même dualité, puisqu'elle est l'image d'un globule statistique.

Avec le schéma des deux fluides, l'interprétation probabiliste consiste à admettre qu'on étudie un élément de chiralité aléatoire (ou de deux éléments de chiralités définies et contraires). Mais nous montrerons à l'annexe I que l'interprétation des relations ($\mathcal{R}$) comporte des interactions entre les flux, et même entre flux de même chiralité. Nous conclurons, après discussion, que l'hypothèse du fluide réel est de beaucoup la plus naturelle; celle-ci paraît d'ailleurs indispensable à toute vision concrète, pour expliquer les actions des obstacles sur une particule (trous d'Young, etc...). Néanmoins il est nécessaire de maintenir l'ambivalence, les relations d'incertitude ayant été établies sur le fluide probabiliste. Cette ambivalence doit d'ailleurs être un des aspects du dualisme quantique (voir ci-après).

B. — Examen d'objections préjudicielles.

Une fois admis que les résultats obtenus concernent des grandeurs concrètes, il reste (l'introduction des états quantifiés ayant été amorcée au chapitre précédent) à vaincre deux objections.

1) *L'indétermination de jauge.*

Celle-ci se manifeste :

— dans l'indétermination du tenseur canonique, d'où une incidence sur les relations $(\mathcal{R})$;

— dans la définition de la vitesse $\vec{v}$ et du lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction de $\vec{u}$ et de ρ.

a) *Indétermination du tenseur canonique.*

Nous allons montrer que, si l'on se borne à l'ordre le plus bas en l_0 et τ_0, les grandeurs physiques de base sont déterminées.

On peut ajouter au lagrangien $\mathcal{L}$ la divergence d'un quadrivecteur $\vec{X}$. Or nous ne devons admettre dans $\mathcal{L}$ que des dérivées du premier ordre, car si l'on élève d'un degré l'ordre de dérivation, l'homogénéité exige qu'on élève aussi d'un degré l'ordre en l_0 ou τ_0. Le seul quadrivecteur réel possible est alors le courant $\frac{j_\mu}{m_0} = -c(\varphi^* \alpha_\mu \varphi)$; d'où un lagrangien complémentaire :

$$\mathcal{L}' = \mathrm{K} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\varphi^* \alpha_\mu \varphi) = \mathrm{K} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu} \alpha_\mu \varphi + \alpha_\mu^* \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right).$$

On en déduit pour le courant un complément :

$$j'_\mu = i \left[\varphi \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi_{(\mu)}} - \varphi^* \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^*(\mu)} \right] = i\mathrm{K}[\varphi \alpha_\mu^* \varphi^* - \varphi^* \alpha_\mu \varphi] = 0$$

$\left(\text{On a posé : } \varphi(\mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial x \mu} \right)$.

Étudions la densité de spin; le tenseur de Belinfante ayant reçu un complément $f'_{\mu,\lambda}$, il en résulte pour $\vec{S}$ un complément $\vec{S}'$ défini dans le système propre par :

$$S'_k = S'_{ij} = f'_{ij4} = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi(4)} \gamma_i \gamma_j \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^*(4)} \gamma_i^* \gamma_j^* \varphi^* \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2} [\gamma_4^* \varphi^* \gamma_i \gamma_j \varphi + \gamma_4 \varphi \cdot \gamma_i^* \gamma_j^* \varphi^*].$$

Or on a :

$$\gamma_4^* \varphi^* \gamma_i \gamma_j \varphi = \varphi^+ \gamma_4^+ \gamma_i \gamma_j \varphi = \varphi^+ \gamma_4 \gamma_i \gamma_j \varphi$$

$$\gamma_4 \varphi \cdot \gamma_i^* \gamma_j^* \varphi^* = \varphi^+ \gamma_j^+ \gamma_i^+ \gamma_4 \varphi = \varphi^+ \gamma_4 \gamma_j \gamma_i \varphi = -\varphi^+ \gamma_4 \gamma_i \gamma_j \varphi.$$

On en déduit $\vec{S}' = 0$.

(Le tenseur $f'_{\mu\nu\lambda}$ n'a pas tous ses termes nuls; on trouverait

$$f'_{\mu\nu\lambda} = -m_0 c\,[\delta_{\mu\lambda} j_\nu - \delta_{\nu\lambda} j_\mu]$$

mais seules les composantes f'_{ij4} représentent la densité de spin; nous y reviendrons.)

Ainsi les grandeurs de base du schéma (densité, courant, spin) restent bien déterminées. On trouve des contributions complémentaires pour les termes du tenseur canonique (1), mais la définition de ce tenseur est mathématiquement conventionnelle, et l'on peut concevoir que parmi l'infinité des tenseurs possibles, l'un ait une valeur physique.

b) *Indétermination dans la définition de la vitesse* $\vec{v}$.

La définition (IV-1) de $\vec{v}$ est faite pour donner à l'équation de Fokker-Planck la forme d'une équation de conservation. Cette condition ne définit le courant $\rho\vec{v}$ qu'à un terme arbitraire près $\frac{\partial \mathcal{T}_{\mu\nu}}{\partial_{x\mu}}$. $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ étant un tenseur antisymétrique.

Mais avec les grandeurs ρ et $\vec{u}$ dont nous disposons, nous ne pouvons former de tel tenseur qu'à l'aide des dérivées de ces grandeurs. Alors le terme complémentaire contient des dérivées secondes, et par homogénéité est du second ordre en l_0. A l'approximation admise il n'y a donc pas d'indétermination.

c) *Indétermination de la fonction d'action.*

Au chapitre v nous avons considéré la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(\rho\vec{u})$ comme la grandeur de base; or elle n'est définie qu'à une divergence d'espace-temps près. Mais le terme complémentaire éventuel serait (μ étant une constante sans dimensions), équivalent à $\mu l_0 m_0 c \frac{\partial(\rho u_\nu)}{\partial x_\nu}$ soit, au premier ordre en l_0, à $\mu l_0 m_0 c \frac{\partial(\rho v_\nu)}{\partial x_\nu}$, qui est nul.

2) *Le problème du spin.*

Le spin apparaît, comme le moment cinétique orbital du point fictif P sur (Γ); c'est-à-dire, vraisemblablement, comme une représentation moyenne de mouvements aléatoires schématisés par P et (Γ).

(1) Pour l'impulsion et l'énergie elles sont proportionnelles à $-\Delta\sigma$ et $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ c'est-à-dire aux densités d'impulsion $\sigma m_0 \vec{u}$ et d'énergie $\sigma m_0 c^2$ du fluide brownien dans le système où $\vec{v} = 0$.

A cette conception semble s'opposer un résultat obtenu par Belinfante [22], montrant que le spin ne contribue pas à l'énergie : le tenseur complémentaire $\theta'_{\mu\nu}$ ajouté au tenseur canonique pour le symétriser a des composantes d'énergie et d'impulsion dont les intégrales de volume sont nulles. Or, s'il est permis de donner le nom de « spin » au moment de l'impulsion θ_{i4}, c'est commettre un abus de langage que de lier la notion de spin à tous les éléments du tenseur. On s'en assure en constatant, dans le cas du fluide de Dirac, que les θ'_{ij} ne s'annulent pas dans le cas d'un spin uniforme, où pourtant tous les effets de spin disparaissent. (Ainsi, par exemple,

$$\theta'_{12} = + \frac{1}{2}\left(\vec{\mathrm{S}}\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{\mathrm{S}}}{\partial t}\right).$$

On aurait d'ailleurs ce résultat paradoxal, qu'une particularité physique serait conférée à un système entièrement arbitraire (sous la seule réserve d'être décrit par un lagrangien).

Cette objection éliminée, il reste que la contribution du spin à l'énergie n'est pas apparente; on voit en effet sur (IX-8 et 25) que si le spin est de direction uniforme, la densité constante et la vitesse irrotationnelle, l'énergie de repos se réduit au terme fixe m_0c^2. Mais nous allons donner des raisons de penser que la fixité du spin et de la densité n'est jamais réalisée, ce qui nous permettra en même temps de proposer une expression de l'énergie de rotation interne.

C. — Onde et particule.

1. *L'onde.*

Le schéma du point P décrivant (Γ), obtenu par voie mathématique, a décelé une vibration élémentaire (rotation orbitale et fluctuations de $\vec{\mathrm{S}}$ et de α), dont la nature n'a pas été précisée; il peut s'agir d'une vibration forcée, propageant (voir chap. IX, sect. 5, D) une action extérieure; ce point de vue servira à l'annexe II.

Mais on peut concevoir aussi qu'il s'agisse d'une vibration spontanée, traduisant la rotation interne du fluide brownien; l'amplitude des fluctuations est alors déterminée, et le terme complémentaire $\frac{1}{2} m_0c^2\alpha^2$ de l'énergie (IX-35) représente l'énergie du spin.

Le schéma de la vibration donne par sa fréquence une image du tremblement de Schrödinger; par ailleurs il contient les éléments de l'onde quantique stationnaire (puis quelconque par transformation de Lorentz); il suffit de définir une fonction φ ayant pour amplitude

la racine de la densité, pour fréquence et pour phase la moitié de celles de la vibration liée au mouvement de P, qui (puisque $\beta = \alpha$), porte à la fois sur le spin et sur la différence des densités des deux flux.

Mais l'onde quantique se déduit de cette vibration d'une manière toute abstraite :

— d'abord par la définition formelle de l'amplitude en fonction de la densité,

— ensuite par la relation de spineur à vecteur qui donne le facteur exponentiel dans le système propre,

— enfin par l'emploi de la transformation de Lorentz pour passer de l'onde stationnaire à l'onde en propagation.

2. *La particule.*

Le caractère abstrait de l'onde ne permet pas qu'on la considère comme pilotant la particule, ou qu'on associe à celle-ci une fonction d'onde à singularité.

Mais reportons-nous au raisonnement qui nous a donné les relations d'incertitude. La mesure de la position du corpuscule est soumise aux sujétions de la diffusion; le corpuscule apparaît donc comme l'un des éléments du fluide (ou un groupe d'éléments de faible étendue) [1] muni d'un caractère particulier que d'abord nous ne cherchons pas à préciser. Nous supposons seulement qu'il altère peu le fluide, pour que la diffusion reste homogène et isotrope. Dans la mesure où la singularité est individualisée, le mouvement de la particule est celui d'une molécule (ou groupe de molécules) du fluide, qui suit en moyenne les lignes de courant.

Mais la singularité peut aussi être supposée répartie en probabilité sur tous les éléments. Le cas extrême est celui où des chances égales sont laissées initialement à chaque élément, et où cette situation se conserve dans le temps, les conditions extérieures ne faisant pas intervenir le caractère particulier (interférences, diffraction). On obtient alors une signification de l'ambivalence : le même fluide est fluide réel pour l'ensemble des éléments et fluide de probabilité pour la particule. La densité de probabilité pour la particule est proportionnelle à la densité du fluide brownien (c'est-à-dire au carré du module de la fonction définie au chapitre V), et ce fluide peut s'identifier avec celui qu'on dérive formellement de l'équation d'onde avec des

[1] A un élément unique il faut attribuer une chilarité aléatoire, peu vraisemblable. On peut imaginer deux éléments singuliers de chiralités contraires (voir ci-après), ou encore une région singulière.

conditions initiales convenables. (Ainsi la vitesse normale, nulle, sur un miroir parfait, est une moyenne obtenue par pondération sur les éléments qui vont au miroir et en reviennent.)

Dans les autres cas les deux fluides se distinguent : soit que les conditions initiales ne permettent plus d'assimiler la densité et la vitesse du fluide formel avec celles du fluide réel (par exemple si la fonction d'onde initiale traduit une localisation de la particule), soit que les conditions extérieures fassent intervenir le caractère particulaire (effets de champ [1], effets de choc, effets perturbateurs). Dans cette dernière catégorie se rangent pratiquement tous les phénomènes comportant un mélange d'états quantiques, où la vitesse du fluide formel prend des valeurs physiquement peu vraisemblables (compliquées et rapidement variables). Toutes les probabilités deviennent des probabilités *a priori* : elles ne sont pas affectées par les mesures et l'on évite les paradoxes liés à la réduction du paquet de probabilité (actions instantanées à distances macroscopiques, etc.).

D'autre part, la fonction d'onde n'ayant pas un rôle de guide physique, on échappe aux objections fondées sur l'affaiblissement de son amplitude (fractionnement sur un miroir, expansion d'une onde sphérique divergente) ; on peut admettre que le vide constitue une réserve d'éléments [2], et que la structure stable du globule se reconstitue. En ce sens nous remarquons que le nombre total des éléments d'un globule (ou encore son volume total) n'est apparu à aucun moment dans notre étude; seule intervient leur concentration, qui définit l'énergie.

Cherchons le sens de la complémentarité, sur l'exemple classique du miroir imparfaitement réfléchissant, soit (M_1). Par un second miroir (M_2) ramenons l'onde réfractée sur l'onde réfléchie par (M_1); les interférences obtenues manifestent l'aspect ondulatoire, tandis qu'un dispositif de mesure de position, placé sur l'onde réfractée ou l'onde réfléchie par (M_1), manifeste l'aspect corpusculaire.

La fonction d'onde initiale étant supposée représenter le fluide brownien réel, ni les conditions initiales ni les réfractions ou réflexions sur les miroirs ne font intervenir le caractère distinctif de la particule; l'appareil de mesure de position agit comme révélateur de ce caractère : ainsi l'aspect ondulatoire ou l'aspect corpusculaire apparaît

[1] L'expression d'un champ électromagnétique ou nucléaire suppose en effet la localisation.

[2] Rappelons que cette raison est l'une de celles qui justifient la valeur c pour la vitesse libre (chap. VI).

suivant que le caractère spécifique de la particule reste latent ou entre en jeu.

Les vitesses supérieures à c dans la zone des interférences produites sur un miroir imparfaitement réfléchissant, s'expliquent en remarquant que ces vitesses ne se manifestent que dans le cas où la vitesse $\vec{v}_0$ du train d'ondes incident a une grandeur voisine de c; alors la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{m_0 v_0}\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$ est de l'ordre du libre parcours moyen contracté $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$. Il en résulte que, normalement au miroir, celui-ci crée des variations finies de la densité sur des distances de l'ordre de l, ce qui altère le concept d'une vitesse physique v_z du fluide en chaque point : la vitesse brownienne correspondante u_z a sur la longueur l des variations relativistes, et c'est seulement en valeur moyenne que le terme en $\frac{\partial \log \rho}{\partial z}$ s'élimine.

On voit alors, en appelant η le coefficient de réflexion, θ l'angle de $\vec{v}_0$ avec la normale au miroir $x'x$, $\vec{v}$ et a^2 la vitesse et la densité dans la zone d'interférences, (et prenant $a_0^2 = 1$) :

1) que suivant une parallèle à $x'x$, il reste possible de définir v_x comme la composante de la vitesse moyenne des éléments; sa conservation au passage de la zone d'interférences donne : $v_x = v_0 \sin\theta$,

2) que parallèlement à Oz on ne peut pas définir en chaque point une vitesse physique. Mais on peut imaginer une vitesse conventionnelle v_z, qui associée à la densité a^2 donne un courant suivant Oz égal à la portion du flux incident qui traverse le miroir, soit $v_0 \cos\theta(1 - \eta^2)$; d'où la relation classique :

$$v_z = \frac{v_0 \cos\theta}{a^2}(1 - \eta^2).$$

La vitesse est bien (si $v_0 \cos\theta \sim c$) supérieure à c dans les franges obscures, mais elle n'a pas de sens microscopique. Sa valeur moyenne $\int_{(V=1)} a^2 v_z \, dV = v_0(1 - \eta^2)$ reste inférieure à c.

Bien entendu, le fait que $\vec{v}$ est parallèle au miroir si $\eta = 1$, n'empêche plus de comprendre la pression de radiation, puisque $\vec{v}$ n'est qu'une vitesse moyenne, et que des chocs browniens se produisent sur le miroir.

b) Le caractère distinctif de la particule pourrait être une amplitude plus grande de la vibration élémentaire; car alors :

1) Compte tenu des limites de validité de l'équation de Dirac [1], les relations (IX, 36 et 38), conduisant à l'égalisation des amplitudes, ne lui seraient pas applicables; ainsi l'énergie de vibration ne se dissiperait pas dans le fluide.

2) Une distribution aléatoire de particules resterait néanmoins représentable par l'équation de Dirac, le caractère singulier étant également réparti et n'intervenant pas dans la statistique.

3) Les interactions pourraient être liées à des résonances de spins [2], ce qui permettrait de les distinguer des chocs browniens internes, et ferait comprendre pourquoi une particule n'est pas affectée par le fluide de l'autre.

3. *L'étalement des groupes d'ondes.*

Il traduit la progression de la diffusion. Mais un effet antagoniste se produit sur les bords du train d'ondes.

Supposons le fluide animé, au niveau quantique, d'une vitesse de translation d'ensemble ($\vec{v}$ = constante). Dans le système propre où $v = 0$, la vitesse moyenne de translation des éléments browniens est :

$$\vec{u} = l_0 c \frac{\vec{\nabla}\rho}{\rho}.$$

Sur les bords du groupe d'ondes $\vec{\nabla}\rho$ est dirigé vers le centre; il en résulte un afflux centripète d'éléments, qui freine l'étalement.

Cet effet compensateur [3] n'apparaît pas dans la mécanique quantique, qui étudie l'évolution d'un volume désigné à l'instant initial, c'est-à-dire d'un nombre déterminé d'éléments; ces éléments sont effectivement dispersés par la diffusion, mais celle-ci amène en remplacement des éléments étrangers.

Ceci confirme bien l'idée qu'il n'y a pas de séparation franche entre le globule et le vide, liés mutuellement par un échange constant d'éléments. Le fait paraît en connexion avec le domaine d'extension

---

(1) Ceci s'adapterait à la conception de deux éléments couplés Φ et ψ, car, l'équation de Dirac n'étant pas applicable, un couplage solidaire pourrait remplacer les mouvements antagonistes de vitesse *c*.

(2) Comme déjà suggéré au chapitre XI (**1** et **3**).

(3) La compensation pourrait n'être pas tout à fait exacte, ce qui expliquerait le vieillissement du photon, par lequel certains proposent d'interpréter le déplacement vers le rouge de la lumière des galaxies lointaines.

infini de la fonction d'onde. Il est aussi à rapprocher des relations d'incertitude; une mesure infiniment précise de l'énergie exigerait la durée infinie, nécessaire pour que l'énergie éparse dans tout l'espace vienne se transmettre à l'appareil de mesure.

D. — Conclusion sur les possibilités d'interprétation.

1. Le premier obstacle à une interprétation concrète est celui des relations d'incertitude, qui semblent interdire tout modèle. Corrélativement l'intervention de l'appareil de mesure paraît détruire l'espoir d'un schéma autonome et intrinsèque, d'autant plus qu'elle comporte des valeurs quantifiées qu'on voit difficilement s'insérer dans une représentation où figurerait un fluide continu.

Or nous avons vu qu'une hypothèse simple, sur l'action d'orientation produite par l'appareil de mesure, donne les valeurs quantifiées des composantes du spin. D'autre part les relations d'incertitude, sont liées au caractère brownien du fluide. Par ailleurs les états quantiques stationnaires de l'électron d'un atome d'hydrogène sont également déduits des lois browniennes.

Ainsi l'hypothèque se trouve levée, le fluide libre peut être étudié intrinsèquement, et les valeurs propres quantifiées apparaissent sous la perturbation d'une action extérieure (appareil de mesure ou champ).

2. A la base de la représentation subsiste un indéterminisme de fait, comparable à celui du mouvement des molécules de la théorie cinétique des gaz. La différence entre les deux problèmes est que les caractères statistiques d'un gaz s'obtiennent en attribuant aux éléments les lois de la mécanique classique. Mais c'est un simple changement d'échelle, que traduit la définition conventionnelle du fluide brownien, dont les éléments n'ont pas de vitesse. Cette différence n'autorise pas à conclure que la représentation quantique soit complète. (Quelle théorie a jamais donnée une représentation complète de la réalité?)

E. — Possibilité d'équations nouvelles.

Nous avons vu au chapitre VII que le passage à la troisième approximation n'a pas donné une équation d'ondes originale. Dans les moments du troisième ordre nous n'avons pas été amenés à introduire des constantes nouvelles.

Avec l'équation nouvelle qu'il propose, M. Heisenberg a introduit une longueur universelle, qui pourrait permettre la quantification

de la masse. Ici la longueur universelle admissible serait le rayon des éléments browniens eux-mêmes; il paraît assez peu probable qu'elle apparaisse dans les paramètres d'ordre supérieur de la diffusion.

2. Suggestions sur la relativité.

A. — Examen des résultats obtenus.

Dans le processus qui conduit à l'équation relativiste de la diffusion, nous avons vu la relativité apparaître à la fin du calcul, sans être introduite au départ. De plus cette équation doit être rapportée à un système de référence dont l'espace et le temps coïncideraient en tous points avec l'espace et le temps propres.

D'une manière indépendante, la décomposition du fluide de Dirac nous amène au même point de vue. Dans le système propre ($v = 0$), les mouvements internes (translation des flux composants et rotation orbitale) ont la vitesse c. Or l'interprétation développée à l'annexe I fait totalement abstraction du formalisme relativiste. Et l'on peut bien s'assurer que la modification est effective, car on considère notamment des moments cinétiques résultants, et il n'y a rien de commun physiquement entre $\Sigma m_0 \vec{v}_\Phi$ et $\Sigma \dfrac{m_0 \vec{v}_\Phi}{\sqrt{1 - \dfrac{v_\Phi^2}{c^2}}}$, qui serait d'ailleurs infini.

Mais ici encore, si la relativité n'est pas introduite au départ, et ne régit pas les mouvements internes au système propre, la contraction de Lorentz apparaît d'elle-même (chap. X) dès qu'on sort de ce système.

Ces deux ensembles concordants de résultats suggèrent qu'*à la base la relativité ne s'applique pas*. Cette idée est venue à l'esprit de nombreux physiciens, inspirée notamment pas les conflits entre la relativité et la convergence, en théorie quantique des champs. Ainsi pressenties, les limites de la relativité ne peuvent être précisées si nous ne disposons d'un principe explicatif.

B. — Principe proposé.

Ce n'est pas seulement l'élément brownien qu'on ne peut lier à un référentiel de Lorentz; il en est de même des points fictifs qui subissent les mouvements internes au système propre, bien qu'ils possèdent une vitesse, puisque ces mouvements ne relèvent pas de la relativité;

celle-ci apparaît avec le mouvement macroscopique de la translation moyenne. La relativité semble donc contenir plus que la notion abstraite du changement de coordonnées : *un référentiel relativiste devrait être un système matériel macroscopique.*

Mais dès qu'il s'agit d'un système physique, il devient naturel qu'il exerce une action physique, d'où naîtrait l'altération des longueurs et des durées. Dans le sens de cette hypothèse nous trouvons les indices suivants.

a) Reprenons le schéma des deux flux. Colinéaires dans le système propre, ils s'inclinent avec la vitesse, de l'angle α tel que $\sin \alpha = \frac{v}{c}$. Ainsi le modèle s'est déformé, et la déformation devient sensible en même temps que l'effet relativiste.

b) Considérons maintenant l'énergie cinétique, que la relativité intègre dans la masse, elle-même identifiée avec l'énergie d'agitation brownienne; quand le fluide passe du repos au mouvement l'augmentation d'énergie a deux aspects :

— en tant qu'*effet brownien*, elle résulte de la réduction du libre parcours due à la contraction de Lorentz,

— en tant qu'*effet cinétique*, elle résulte d'une action extérieure.

L'équivalence de ces deux aspects suggère de lier la contraction de Lorentz à une action physique (la solidarité des longueurs avec les écarts quadratiques suffit déjà d'ailleurs à rendre cette vue assez probable). Et comme l'effet relativiste est déterminé par la situation du corps mobile devant le repère, l'action paraît ne pouvoir venir que du repère, — c'est-à-dire en pratique de la Terre. Les phénomènes relativistes se sont toujours, jusqu'à présent (nous réservons le cas des satellites artificiels) manifestés au contact de la Terre, — même ceux qui sont liés au mouvement d'une étoile, car on les mesure sur les photons envoyés vers nous par l'étoile. (Voir à l'annexe II l'étude de l'effet Doppler stellaire.)

C. — Effets du principe sur les contradictions rencontrées.

Ces contradictions se résolvent. La relativité n'apparaît qu'avec le repère macroscopique, qui altère le fluide mobile. L'équation de la diffusion a été établie sur le fluide libre, et contient donc l'espace et le temps propres; en lui appliquant une transformation de Lorentz on intégre l'effet des altérations. Le modèle du fluide de Dirac est considéré dans le système propre, c'est-à-dire sur le fluide libre, et

les mouvements internes au système propre, ne comportant pas l'action d'un repère matériel, ne relèvent pas de la relativité.

D. — Interprétation du formalisme.

Supposons que nous interprétions comme suit le formalisme relativiste;

Nous cessons de considérer des règles et des horloges liées au système $\left(\sum_0\right)$ mobile devant le repère macroscopique (Σ). Mais nous comparons deux états de $\left(\sum_0\right)$: libre [c'est-à-dire éloigné de (Σ) ou immobile devant lui], et perturbé par (Σ). Toutes les mesures sont faites dans le repère non perturbé : $\left(\sum_0\right)$ dans le premier cas, (Σ) dans le second.

Par longueurs propres et temps propre nous entendrons les longueurs et les temps avant perturbation. L'équivalence avec la conception classique est manifeste : les quantités à mesurer et les étalons de mesure étant altérés dans le même rapport, les mesures dans le système propre sont identiques aux mesures avant perturbation; les formules de Lorentz traduisent l'effet de la perturbation.

Nous montrons à l'annexe II que ce point de vue permet de retrouver toutes les formules relativistes, qui se trouvent ainsi pourvues d'un fondement concret. Nous examinons également des objections possibles.

E. — Conséquences.

1) D'abord le problème de la variance des constantes minimales est éclairci. L'écart quadratique longitudinal l, la durée $\tau = \frac{l}{c}$ du libre parcours longitudinal, sont des grandeurs moyennes d'un fluide aléatoire étendu, et subissent les effets relativistes; l se transforme comme une longueur [1] et τ comme la période d'une onde.

Mais ce qui touche à l'élément brownien individuel ne relève pas de la relativité. Ainsi le rayon des éléments fournirait cette longueur universelle invariante (c'est-à-dire définie physiquement dans un système libre) qui est l'objet de beaucoup d'espoirs actuels.

Il semble, par ailleurs, que les conflits qui se rencontrent dans la

[1] En tant qu'écart quadratique, mais les actions élémentaires exercées sur le fluide, à partir du système fixe font intervenir la moyenne quadratique invariante (voir annexe II).

théorie quantique des champs, entre la convergence et la covariance, devraient trouver une conciliation dans un formalisme adéquat : sur le plan des principes le conflit n'existe plus.

Les idées proposées permettent de concevoir (et l'annexe II le montre concrètement) pourquoi la vitesse de la lumière intervient dans les équations de la matière. Elles aident à comprendre certaines conséquences de la relativité (couple nécessaire pour maintenir l'orientation d'un levier coudé en translation, etc...) (1).

Dans tous les problèmes pratiques correspondant à des expériences faites sur la Terre, les vues proposées n'apportent aucune modification : l'altération causée par le référentiel sera celle donnée par le formalisme.

Si au contraire on place des horloges dans un satellite artificiel, leur retard devrait devenir inférieur à celui donné par la relativité restreinte, quand la distance à la Terre augmente. Mais il faudrait encore tenir compte de l'effet de relativité générale, qui est aussi une atténuation comme l'a montré M. Jacques Lévy [24] dans un cas particulier (2). Il se peut que les deux effets soient identiques. Alors les idées proposées n'apporteraient pas de limitation nouvelle à la relativité restreinte dans le domaine macroscopique, où elle serait relayée par la relativité générale (3) : les seules modifications se produiraient du côté du microscopique.

2) La règle consistant à généraliser un problème newtonien en remplaçant la condition $t' - t \to 0$ par $t' - t = \tau_0$, prend le sens d'un nouveau formalisme et serait probablement susceptible d'extension.

---

(1) L'augmentation de la durée de vie du méson μ résulterait d'une action physique.

(2) Le cas étudié est celui ou $\frac{v}{c} \ll 1$ et où le retard $\delta\theta$ de l'horloge du satellite est très faible. Si λ est le rapport du rayon de l'orbite au rayon terrestre, on trouve pour une durée d'un an un retard de $\frac{0{,}033}{\lambda}$ seconde. Comme l'orbite doit être hors de l'atmosphère terrestre, $\lambda > 1{,}2$, d'où pour $\delta\theta$ un maximum de 0,030 seconde par an.

(3) Quelques indications en ce sens sont données à l'annexe II.

ANNEXE I

INTERPRÉTATION DE LA REPRÉSENTATION DE TAKABAYASI DE L'ÉQUATION DE DIRAC

(Additif au chapitre X)

1. Hypothèses admises.

A) Les effets à considérer sont :

— les translations de vitesse c suivant les deux flux,

— l'effet de spin, schématisé par la rotation de P où toute la masse serait concentrée,

— des effets secondaires dus aux inégalités des grandeurs locales (notamment courants compensateurs créant des tensions),

— des effets d'interaction brownienne entre les flux.

B) A chaque flux secondaire sera supposé associé, comme pour les flux principaux, un moment cinétique coaxial, calculé par analogie avec (X-4), soit pour la densité de ce moment ($\vec{K}$ étant la densité du courant secondaire) :

$$\vec{\mathfrak{M}} = \varepsilon \frac{\hbar}{2c} \vec{K} \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{1}$$

Nous opérons dans le système propre en O, prenons le spin en O pour axe des z, et sous les réserves énoncées au chapitre X, calculons d'abord au premier ordre en τ_0 avec $\sin \alpha \sim \alpha$.

Notons que par (1) et IX (20) la rotation associée à $\vec{K}$ est

$$\Omega = \frac{4\mathfrak{M}}{m_0 l_0^2} = \frac{2\varepsilon \vec{K}}{l_0}. \tag{1 bis}$$

2. Effets (v) dus aux variations des vitesses.

A. — Rotation du spin (Λ^v).

Nous avons déjà obtenu (chap. IX, section 1)

$$\vec{\Lambda}^v = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}. \tag{2}$$

B. — Impulsion.

La relation (IX-19), appliquée à chaque fluide, donne :

$$\vec{L}_{1\Phi} = \frac{m_0 l_0^2}{4} \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{v}_\Phi)$$

$$\vec{L}_{1\psi} = \frac{m_0 l_0^2}{4} \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{v}_\psi).$$

Or :

$$\sigma_\Phi \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{v}_\Phi) = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi) - (\vec{\nabla}\sigma_\Phi \wedge \vec{v}_\Phi) = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi) - c(\vec{\nabla}\sigma_\Phi \wedge \vec{s}).$$

de même :

$$\sigma_\psi \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{v}_\psi) = \overrightarrow{\text{rot}}\,(\sigma_\psi \vec{v}_\psi) + c(\vec{\nabla}\sigma_\psi \wedge \vec{s}_\psi).$$

D'où par (X-1) et (X-3) :

$$\sigma_\Phi \vec{L}_\Phi - \sigma_\psi \vec{L}_\psi = \frac{l_0}{2} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{S} - m_0 c \frac{l_0^2}{4} \vec{\nabla}\sigma \wedge \vec{s}.$$

Aux globules Φ et ψ nous associons respectivement, par (1), des densités d'impulsion $+\frac{2}{l_0}\sigma_\Phi \vec{L}_\Phi$ et $-\frac{2}{l_0}\sigma_\psi \vec{L}_\psi$; d'où une densité totale d'impulsion

$$(3)\quad \vec{G}_r(\vec{v}) = +\frac{2}{l_0}(\sigma_\Phi \vec{L}_\Phi - \sigma_\psi \vec{L}_\psi) = +\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{S} - \frac{m_0 l_0 c}{2} \vec{\nabla}\sigma \wedge \vec{s}.$$

C. — Tensions $(\theta_{ij}^{(v)})$.

Calculons les tensions $\theta_{ij}^{(v)}$ sur xOz. Elles seront schématiquement

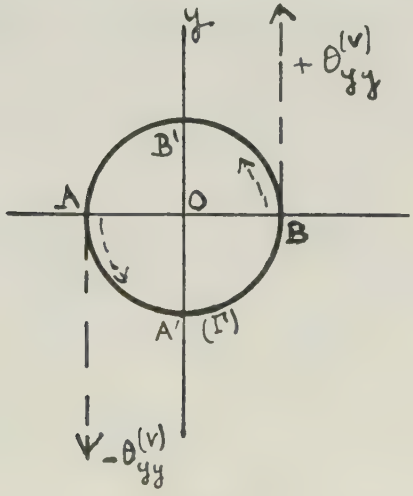


Fig. 1.

concentrées aux points A et B de l'orbite (Γ), et comme la rotation

orbitale qui les transporte a une vitesse normale à xOz et égale à c, il leur correspondra des vitesses de courants $\vec{q}_{(A)}$ et $\vec{q}_{(B)}$, tels que $q_i(A) = -\frac{\theta_{ij}^{(v)}(A)}{\sigma m_0 c}$ et $q_i(B) = +\frac{\theta_{ij}^{(v)}(B)}{\sigma m_0 c}$.

Comme $v = 0$ en O, la répartition des vitesses $\vec{v}$ est, au premier ordre, fonction impaire des coordonnées; donc $q_i(A) = -q_i(B)$ (ce qui explique l'absence de contribution à l'impulsion); $\theta_{ij}^{(v)}(A)$ $\theta_{iy}^{(v)}(B)$ sont égaux et peuvent être pris pour valeur de $\theta_{iy}^{(v)}(O)$.

Cherchons un schéma d'ensemble des vitesses de courants $\vec{q}$ dus aux gradients des composantes de la vitesse $\vec{v}$. Nous substituerons au fluide un réseau maillé parallèle aux axes, et d'intervalle l_0. Opérant dans le système propre au nœud O, nous considérerons aux nœuds voisins M, N, R (et pour mémoire aux symétriques par rapport à O) :

— les courants dûs aux gradients des composantes de la vitesse,

— des courants compensateurs calculés pour équilibrer les moments cinétiques des premiers par rapport à O.

Les deux groupes de courants se lisent sur les figures ci-dessous.

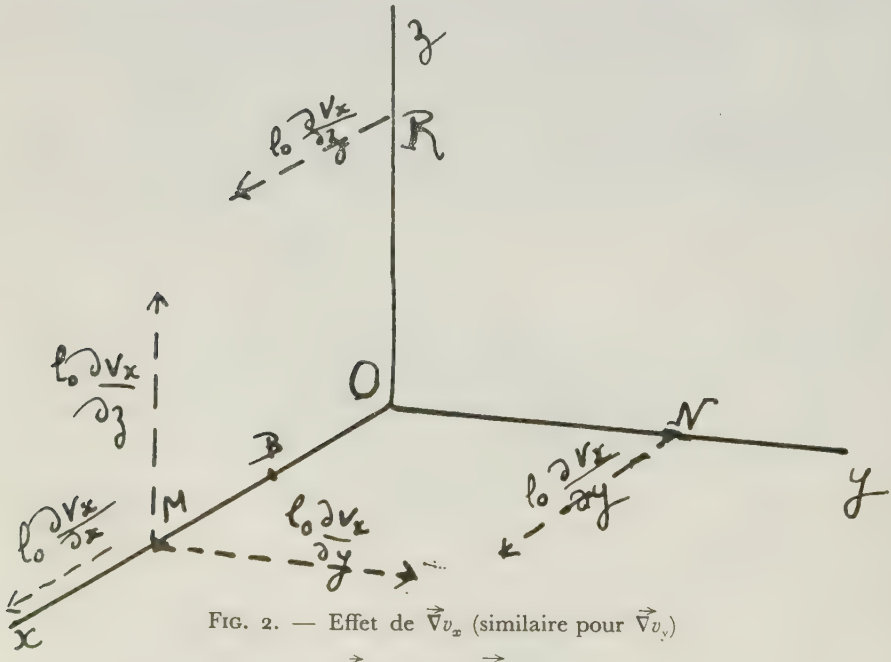


FIG. 2. — Effet de $\vec{\nabla} v_x$ (similaire pour $\vec{\nabla} v_y$)

$$\vec{q}(M) = l_0 \vec{\nabla} v_x;$$

d'où

$$(5) \quad \vec{q}(B) = \frac{1}{2}\vec{q}(M) = \frac{l_0}{2}\vec{\nabla} v_x \qquad \text{et} \qquad = + S_i(\vec{\nabla} v_x)_i.$$

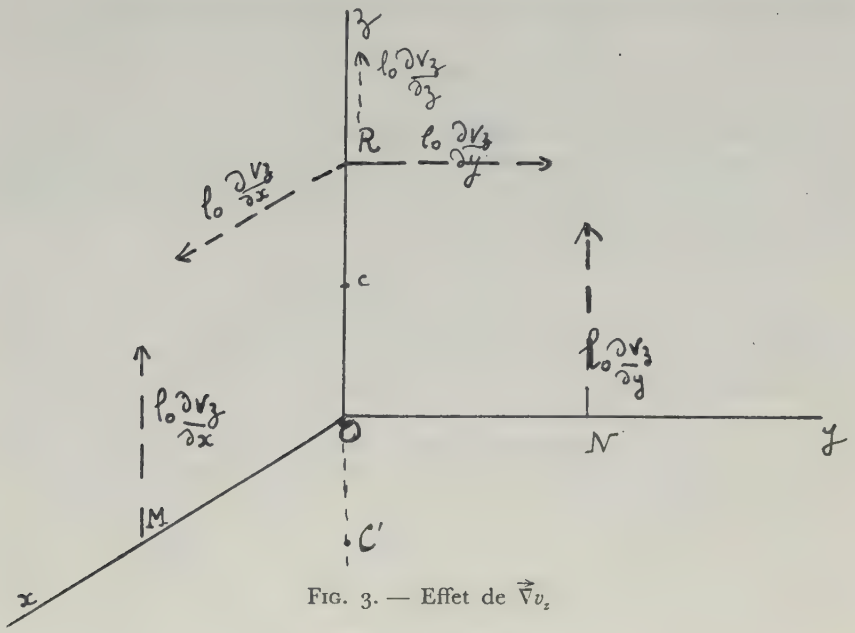


FIG. 3. — Effet de $\vec{\nabla} v_z$

$$\vec{q}(\mathrm{R}) = l_0 \vec{\nabla} v_z$$

d'où $$\vec{q}(\mathrm{C}) = -\vec{q}(\mathrm{C}') = \frac{l_0}{2} \vec{\nabla} v_z)$$

Pour θ_{ix} on obtient une formule similaire, avec changement de signe; l'effet est nul sur les plans normaux à Mz; d'où l'expression générale :

(6) $$\theta_{ij}^{(v)} = + \varepsilon_{jkl} S_k \frac{\partial v_l}{\partial x_i}.$$

D. — ÉNERGIE (W^v).

La pression sur une paroi se définit par les chocs des éléments du fluide sur les molécules de la paroi. Ici se sont les éléments eux-mêmes qui subissent les chocs; ils jouent donc, près de chaque face du cube $d\vec{x}$, le rôle d'une paroi mobile avec la vitesse c, dont le travail sous les tensions se dissipera dans le fluide par effet brownien (distribution du surcroît d'énergie cinétique dû au travail des tensions). Cette explication se justifie en l'appliquant d'abord aux tensions normales des courants principaux, qui d'après la loi générale

$$t_{ij} = m_0 \sigma u_i u_j$$

sont $t_{zz}^{\Phi} = m_0 c^2 \sigma_\Phi$ et $t_{zz}^{\downarrow} = m_0 c^2 \sigma_\downarrow$, soit au total pour le travail :

$$m_0 c^2 (\sigma_\Phi + \sigma_\downarrow) \vec{dx} = m_0 c^2 \sigma \vec{dx},$$

ce qui donne le terme principal de la densité d'énergie.

En supposant les tensions liées fictivement (fig. 1) à A (ou B), et A′ (ou B′) et ces points mûs par la rotation orbitale, on trouve dans le cube $dx\,dy\,dz$ un travail :

$$(\theta_{yy}^{(v)}\, dx\, dz)\, dy + (\theta_{xx}^{(v)}\, dy\, dz)\, dx$$

Il en résulte, par (6), une densité d'énergie :

$$W^{(v)} = -S_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

d'où l'expression générale

$$W^{(v)} = -\vec{S}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}. \tag{7}$$

3. Effets (σ) dus aux variations des densités (ou de $\mathfrak{a}$).

Comme $\frac{\Omega_2}{\sigma} = \sin \mathfrak{a}$ est petit, et du fait de la nature oscillatoire de $\mathfrak{a}$, nous admettrons que les variations relatives de σ sur l_0 et τ_0 sont faibles devant celles de $\mathfrak{a}$; alors $\vec{\nabla}\Omega_2 \sim \sigma \vec{\nabla}\mathfrak{a}$, et $\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \sim \sigma \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}$.

Pour tenir compte du décalage de $\frac{\tau_0}{2}$ et des mouvements suivant les flux principaux, les densités à considérer en chaque point sont non pas σ_Φ et $\sigma_\downarrow$, mais σ'_Φ et $\sigma'_\downarrow$ (avec $\sigma'_\Phi - \sigma'_\downarrow = \sigma\mathfrak{a}$).

A. — Rotation [$\Lambda^{(\sigma)}$].

En un point Q de la sphère (Σ) de centre O et de rayon $\frac{l}{2}$, les densités des deux flux ont varié par rapport à celle de O, de $\frac{l_0}{2} \vec{\nabla}_D \sigma'_\Phi$ et $\frac{l_0}{2} \vec{\nabla}_D \sigma'_\downarrow$, D étant la direction de OQ. Ceci donne sur la fraction μ de (Σ) entourant Q, des transferts de matière $\mu c \frac{l_0}{2} \vec{\nabla}_D \sigma'_\Phi$ et $\mu c \frac{l_0}{2} \vec{\nabla}_D \sigma'_\downarrow$,

qui représentent les projections sur D de courants

$$\vec{i}_\Phi = c\frac{l_0}{2}\vec{\nabla}\sigma'_\Phi \qquad \vec{i}_\psi = c\frac{l_0}{2}\vec{\nabla}\sigma'_\psi.$$

Il leur correspond, par (1), et compte tenu des chiralités, des moments cinétiques $+\frac{m_0 l_0}{2}\vec{i}_\Phi$ et $-\frac{m_0 l_0}{2}\vec{i}_\psi$, d'où en ajoutant, et par (X, 10) une rotation :

$$\vec{\Lambda}^{(\sigma)} = +c\vec{\nabla}\mathfrak{a}. \tag{8}$$

Pendant la durée $\frac{\tau_0}{2}$, la déviation du spin est $c\frac{\tau_0}{2}|\nabla\mathfrak{a}| = \delta\mathfrak{a}$, δ étant la variation de $\mathfrak{a}$ sur $\frac{l_0}{2}$. Pour la vibration élémentaire, $\mathfrak{a}$ étant pris nul centre de l'orbite, on retrouve $\beta = \mathfrak{a}$.

En ajoutant (2) et (8) on obtient IX, (6).

B. — Tensions $(\theta_{ij}^{(\sigma)})$.

Comme plus haut, les tensions seront supposées liées à des courants compensateurs des variations locales; nous prendrons donc ici

$$\vec{i}'_\Phi = -\vec{i}_\Phi; \qquad \vec{i}'_\psi = -\vec{i}_\psi.$$

Cherchons les effets produits sur une surface normale au spin Oz; les flux principaux étant antagonistes, on a un courant secondaire;

$$\mathrm{I} = \vec{i}'_\Phi - \vec{i}'_\psi = -c\frac{l_0}{2}\sigma\vec{\nabla}\mathfrak{a}. \tag{9}$$

Ce courant est associé à σ éléments; pour les σc éléments traversant une surface unité normale à Oz par unité de temps, on obtient un transfert de quantité de mouvement :

$$-m_0 c^2\frac{l_0}{2}\sigma\vec{\nabla}\mathfrak{a} = -c\mathrm{S}_z\vec{\nabla}\mathfrak{a}$$

d'où les valeurs des tensions :

$$\theta_{iz}^{(\sigma)} = -c\mathrm{S}_z\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial x_i}$$

à travers les faces parallèles à Oz aucune action ne s'exerce; on le voit par isotropie, car ici il n'y a aucun effet rotationnel. On trouve donc sous forme générale :

$$\theta_{ij}^{(\sigma)} = -c\mathrm{S}_j\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial x_i}. \tag{10}$$

En ajoutant (6) et (10) on obtient IX, (9).

C. — Énergie ($W^{(\sigma)}$).

Soit un cube $\vec{dx}$ d'arête unité. La densité d'énergie est, comme ci-dessus, le travail des tensions des éléments Φ et ψ quand ils balayent $\vec{dx}$, c'est-à-dire leur travail sur une longueur unité suivant Oz. On obtient respectivement $m_0 c(i'_\Phi)_z$ et $-m_0 c(i'_\psi)_z$; au total, par (9)

$$W^{(\sigma)} = \theta_{zz} = -cS_z \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z};$$

d'où sous forme générale :

$$W^{(\sigma)} = -c\vec{S}\vec{\nabla}\mathcal{A}. \qquad (11)$$

l'addition de (7) et de (11) au terme principal $m_0\Omega_1 c^2 C$ compte tenu de la signification de Ω_1 proposée au chapitre X, donne l'équation IX (8).

D. — Impulsion ($G^{(\sigma)}$).

On peut décomposer $\mathcal{A}$ en deux parts : l'une macroscopique $\mathcal{A}_M$, dépendant des actions extérieures (c'est-à-dire ici des conditions aux limites), l'autre microscopique $\mathcal{A}_m$, qui traduit la vibration élémentaire. Le terme complémentaire $\frac{1}{c}\vec{S}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}$ de l'impulsion se décompose en $\frac{1}{c}\vec{S}\frac{\partial \mathcal{A}_M}{\partial t}$ et $\frac{1}{c}\vec{S}\frac{\partial \mathcal{A}_m}{\partial t}$, et comme la variation temporelle de $\mathcal{A}_m$ est beaucoup plus lente que celle de $\mathcal{A}_M$, la première contribution, du second ordre en τ_0, s'élimine (1) ; la deuxième est du premier ordre (chap. IX). Sa signification physique est de compenser l'appoint à l'impulsion que donne la vibration élémentaire par le terme $+\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{S}$, puisque nous avons vu (*ibidem*) que pour cette vibration les deux apports s'équilibrent.

On n'a pas, par (1), une contribution à $\vec{\Lambda}$, car $G^{(\sigma)}$ est colinéaire au spin.

4. Effets dus aux interactions browniennes entre les courants.

A. — Formule générale.

Soient deux courants formant un angle α. Supposons-les d'abord de chiralités contraires; appelons $\vec{V}_\Phi$ et $\vec{V}_\psi$ leurs vitesses, de valeur

(1) C'est pourquoi l'équation de Pauli, dont la représentation ne contient pas $\frac{1}{c}\vec{S}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$, ne peut décrire le fluide qu'à grande échelle (voir les dernières lignes du chapitre IX).

c, ρ_Φ et ρ_ψ les densités (qu'il faut distinguer de celles σ_Φ et σ_ψ des courants principaux).

Le moment cinétique ψ a une densité $\mathrm{I}_\psi = -\frac{m_0 l_0}{2}\rho_\psi \vec{\mathrm{V}}_\psi$, de composante $\mathrm{I}_\psi^{(t)} = \frac{m_0 l_0}{2} c\rho_\psi \sin\alpha$ (en valeur absolue) dans le plan normal à $\vec{\mathrm{V}}_\Phi$.

Cherchons la part $\mathrm{I}'\psi^{(t)}$ transmise au fluide Φ par effet brownien. Tous les chocs étant considérés comme également possibles, la probabilité de l'effet étudié pour un élément ψ donné, est $\frac{\rho_\Phi}{\sigma}$ d'où

$$\mathrm{I}'_\psi{}^{(t)} = \frac{\rho_\Phi}{\sigma}\mathrm{I}_\psi{}^{(t)}.$$

$\mathrm{I}'_\psi(t)$ imprime aux points K et L du diamètre de (Γ_Φ) qui lui est normal, des vitesses $+u_0$ et $-u_0$ telles que $\rho_\Phi m_0 l_0 u_0 = \mathrm{I}'_\psi{}^{(t)}$. K prend

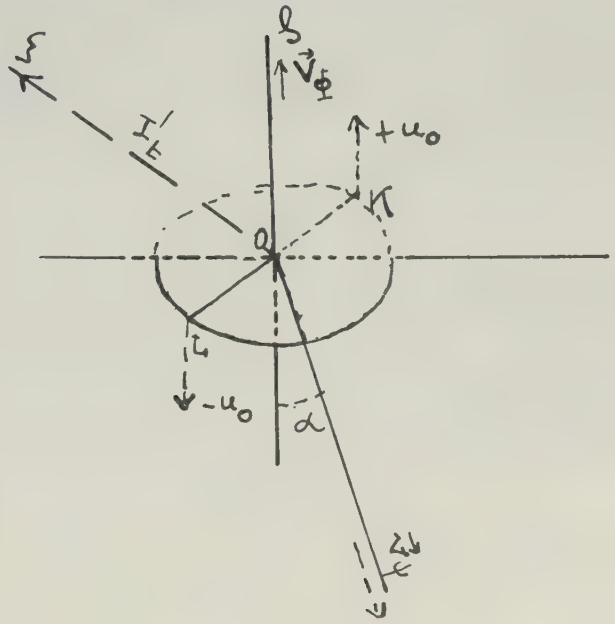


Fig. 4.

donc par rapport à L une vitesse relative $2u_0$ dans le sens du courant Φ; d'où en traversant $\xi O\zeta$, une variation relative de densité $\frac{2u_0}{c}$ (passage du volume $\mathcal{V}$ au volume $\mathcal{V}'$ sur la figure 5), égale à $\frac{\rho_\psi}{\sigma}\sin\alpha$, et équiva-

lente à un transport, par unité de temps, suivant KL, de valeur :

$$\frac{m_0 c \rho_\Phi \rho_\psi \sin \alpha}{\sigma}.$$

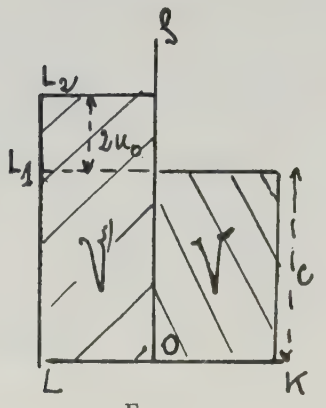


Fig. 5.

L'action de Φ sur ψ est égale et de même sens, car l'effet de basculement et le sens du courant sont tous deux inversés; d'où au total, une densité d'impulsion :

$$(12) \qquad \vec{\Gamma} = -\frac{2}{c}\frac{m_0}{\sigma}(\rho_\Phi \vec{V}_\Phi \wedge \rho_\psi \vec{V}_\psi)$$

Si les deux courants ont même chiralité, on obtient la même formule avec un signe contraire.

B. — Première contribution a l'impulsion ($\vec{G}^{(b_1)}$).

Prenons $\left.\begin{matrix} \vec{V}_\Phi = \vec{cs} \\ \rho_\Phi = \sigma_\Phi \end{matrix}\right\}$ (courant principal Φ)

$$\rho_\psi \vec{V}_\psi = \vec{i}_\psi = \frac{cl_0}{2}\vec{\nabla}\sigma'_\psi.$$

La formule donne

$$-\frac{m_0}{\sigma}\sigma_\Phi c l_0 (\vec{s} \wedge \vec{\nabla}\sigma'_\psi).$$

Prenons

$$\rho_\Phi V_\Phi = \vec{i}_\Phi = \frac{cl_0}{2}\vec{\nabla}\sigma'_\Phi; \qquad \left.\begin{matrix} \vec{V}_\psi = -\vec{cs} \\ \rho_\psi = \sigma_\psi \end{matrix}\right\} \text{(courant principal } \psi)$$

On trouve :

$$+\frac{m_0}{\sigma}\sigma_\psi c l_0 (\vec{\nabla}\sigma'_\Phi \wedge \vec{s}).$$

En ajoutant on obtient, avec $\frac{\sigma_\Phi}{\sigma} = \frac{\sigma_\psi}{\sigma} = \frac{1}{2}$ et $\sigma'_\Phi + \sigma'_\psi = \sigma$

$$\vec{G}_{(b_4)} = + \frac{m_0 c l_0}{2} (\vec{\nabla}\sigma \wedge \vec{s})$$

d'où par (3) :

$$G^{(v)} + G^{(b_4)} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{S}. \tag{13}$$

C. — Deuxième contribution a l'impulsion ($\vec{G}^{(b_2)}$).

Les deux courants principaux, colinéaires au temps t, se sont inclinés au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$; si on prend :

$$\vec{V}_\Phi = \vec{v}_\Phi\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right); \qquad \vec{V}_\psi = \vec{v}_\psi\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right)$$

la formule donne :

$$\vec{G}^{(b_2)} = -\frac{2}{c}\frac{m_0}{\sigma}(\sigma_\Phi \vec{v}_\Phi \wedge \sigma_\psi \vec{v}_\psi)_{\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)} = +\frac{2}{c l_0}(\vec{v} \wedge \vec{S})_{\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v} \wedge \vec{S}). \tag{14}$$

En ajoutant $G^{(\sigma)}$ aux contributions (13) et (14) on obtient IX (7).

D. — Première identité cinématique (équations (IX-10) et (IX-11).

Appliquons la formule (12) aux courants secondaires associés aux tensions $\theta^{(v)}_{ix}$ et $\theta^{(v)}_{iy}$ (pour $\theta^{(\sigma)}_{ij}$ on aurait des termes du second ordre à la fois en l_0 et en $\mathcal{A}$).

Prenons d'abord l'élément Φ pour la face xOz et l'élément ψ pour la face yOz. Les tensions sur xOz et yOz se traduisent par des impulsions $+ m_0 l_0 \vec{\nabla}(\sigma_\Phi v_x^\Phi)$ et $-\frac{m_0 l_0}{2}\vec{\nabla}(\sigma_\psi v_y^\psi)$. (On a écrit que, en O, $\sigma\vec{\nabla} v_i = \vec{\nabla}(\sigma v_i)$, puis décomposé $\sigma\vec{v}$).

L'interaction de ces éléments animés de vitesses combinées de translation et de rotation produit une densité d'impulsion qui se calcule comme ci-dessus, en notant qu'il y a cette fois, pour un élément donné, la probabilité 1/2 d'une interaction avec un élément de chiralité opposée; on obtient par (12) :

$$+\frac{1}{c\sigma}\frac{m_0 l_0^2}{4}\vec{\nabla}(\sigma_\Phi v_x^\Phi) \wedge \vec{\nabla}(\sigma_\psi v_y^\psi).$$

On a la même formule avec le même signe si on échange Φ et ψ; au contraire le signe change pour les interactions entre éléments de

même chiralité. En ajoutant les quatre contributions, on obtient par (X-3) une densité totale d'impulsion $\vec{\gamma}$ de composantes :

$$\gamma_z = -c\sigma\frac{m_0 l_0^2}{4}s_z\left[\frac{\partial s_x}{\partial x}\frac{\partial s_y}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x}\frac{\partial s_x}{\partial y}\right]$$

$$\gamma_x = -c\sigma\frac{m_0 l_0^2}{4}s_z\left[\frac{\partial s_x}{\partial y}\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_y}{\partial y}\frac{\partial s_x}{\partial z}\right]$$

$$\gamma_y = -c\sigma\frac{m_0 l_0^2}{4}s_z\left[\frac{\partial s_x}{\partial z}\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial x}\frac{\partial s_y}{\partial z}\right]$$

soit en axes quelconques :

$$\vec{\gamma} = -c\sigma\frac{m_0 l_0^2}{4}\vec{D}$$

avec

$$D_i = \begin{vmatrix} s_x & s_y & s_z \\ \partial_j s_x & \partial_j s_y & \partial_j s_z \\ \partial_k s_x & \partial_k s_y & \partial_k s_z \end{vmatrix}$$

(*ijk* permutation paire de *xyz*)

$$\left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$$

Cette impulsion ne figure pas dans $\vec{G}$ parce qu'elle est du second ordre en l_0; mais par (1 bis) on a une rotation associée du premier ordre :

$$\vec{R} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{2}{m_0 l_0}\vec{\gamma}.$$

Dressons maintenant le total des effets rotationnels. La rotation $\vec{\Lambda}$ est calculée à la manière classique, c'est-à-dire en considérant les tensions comme des forces extérieures. Mais les tensions sont des courants d'éléments browniens tout semblables à ceux du fluide. Ainsi on aura une représentation plus fine en remplaçant :

1° le courant $\sigma\vec{v}$ [1] par $\dfrac{\vec{G}}{m_0}$, obtenu en ajoutant à $\sigma\vec{v}$ les différents courants secondaires ci-dessus,

2° la rotation $\vec{\Lambda}$ par la rotation $\vec{\Lambda}'$ obtenue en composant les effets rotationnels des courants primaires et des courants compensateurs qui traduisent les tensions.

---

[1] Au premier ordre $\vec{\sigma v}$ et $\Omega_1\vec{v}$ sont équivalents

Or les courants compensateurs $\vec{q}$ schématisés sur les figures 2 et 3 équilibrent les moments cinétiques dus aux variations locales des vitesses; d'autre part le courant compensateur qui crée $\theta_{ij}^{(\sigma)}$ est opposé au courant primaire $\vec{i}$. On en déduit que les deux termes $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ et $+ c\vec{\nabla}a$ sont annulés par l'effet des tensions, et que $\vec{\Lambda}'$ se réduit à $\vec{R}$, elle aussi liée aux tensions. La formule qui correspond à (2) dans la nouvelle représentation est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{G}}{\sigma}\right) = m_0\vec{R} = -\varepsilon\frac{\hbar}{2}\vec{D}.$$

C'est l'équation IX (10) avec $\varepsilon = +1$ [1].

E. — Deuxième identité cinématique (X-12).

Elle exprime la variation de $\vec{G}$ par unité de temps. Son premier terme $-\vec{\nabla}W$ montre que la densité d'énergie a le rôle d'un potentiel; elle a effectivement été calculée comme un travail. Il faut retrouver le second terme.

Pendant l'unité de temps, apparaissent, pour les courants principaux, des composantes $\vec{Q}$ normales à Oz, qui vont interagir avec les flux $\vec{q}$ de la figure 2.

Les courants q_y et Q_y transportent normalement, à travers xOz, avec la vitesse c, des densités pouvant être évaluées :

— pour q_y, à σ (l'impulsion secondaire transportée par élément étant alors $\lambda = +\dfrac{S_z}{c\sigma}\vec{\nabla}(\sigma v_z)$,

— pour Q_y, à $\sigma_1 = \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial}{\partial t}(\sigma v_y)$ (par redistribution du courant σQ_y en $\sigma_1 c$ suivant la rotation orbitale).

Ceci s'applique aussi bien aux constituants Φ et ψ des courants $\vec{q}$ et $\vec{Q}$; nous les considèrerons désormais séparément.

Les courants q_y^{Φ} et Q_y^{Φ} peuvent (du fait de l'opposition des mouvements suivants Oz), interagir en celui des deux points (A ou B) où

---

(1) Ainsi reste seule non justifiée la chiralité de ces courants d'interaction brownienne. Pour $\vec{\gamma}$ les quatre contributions donnent des effets rotationnels concordants et droits. Au contraire pour $\vec{G}_{(b1)}$ et $\vec{G}_{(b2)}$, qui n'apparaissent pas dans $\vec{\Lambda}$ ni dans $\vec{R}$ les effets composants s'annulent.

les vitesses suivant xOy sont de sens contraire. Nous admettrons :

— que chaque élément de Q_y transporte aussi l'impulsion $\vec{\lambda}$ (1),

— que pour $\sigma_1 = \sigma$ toute l'impulsion est détruite par chocs (il en est bien ainsi du courant $\sigma\vec{v}$ quand les densités sont équilibrées).

On obtient alors pour contribution à la variation moyenne $\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}$:

$$-2\times\frac{1}{2c\sigma}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_\Phi v_\Phi^\gamma)\left(\frac{S_z}{c\sigma}\vec{\nabla}\sigma_\psi v_x^\psi\right)$$

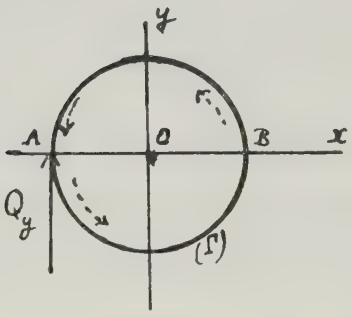


Fig. 6.

En échangeant Φ et ψ, considérant les effets sur yOz (formule analogue avec changement de signe) et sommant, on a par (2 et 3) la contribution suivante à $\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}$.

$$+\frac{S_z}{c^2}\left[\frac{\partial v_x}{\partial t}\vec{\nabla}v_y-\frac{\partial v_y}{\partial t}\vec{\nabla}v_x\right]-S_2\left[\frac{\partial s_x}{\partial t}\vec{\nabla}s_y-\frac{\partial s_y}{\partial t}\vec{\nabla}s_x\right]$$

ce qui en axes quelconques donne le deuxième terme de (IX-12).

5. Effets du second ordre (le quadrivateur J_μ).

Tous les termes étudiés ci-dessus sont du premier ordre (sauf pour l'énergie). Étudions maintenant des effets correctifs du second ordre.

(1) Ceci revient à dire que les courants liés au gradient de la vitesse sont bien déterminés en chaque point, quel que soit le fluide qu'ils accompagnent. On observe, en ce sens, que le calcul de $\theta_{ij}^{(\nu)}$ s'effectue comme pour un fluide unique.

A. — Correction de densité.

Pour obtenir le terme principal $m_0\Omega_1\vec{v}$ de $\vec{G}$, on a pris Ω_1 comme densité effective. A partir de l'impulsion particulaire $\vec{g} = \frac{\vec{G}}{\sigma}$ et de l'énergie particulaire $\vec{w} = \frac{\vec{W}}{\sigma}$, on peut de même constituer un fluide dont les densités d'impulsion et d'énergie seraient $\Omega_1\vec{g}$ et $\Omega_1\vec{w}$. On définit ainsi un quadrivecteur K_μ tel que

$$K_i = \frac{\Omega_1}{\sigma} G_i \qquad K_4 = \frac{i}{c}\frac{\Omega_1}{\sigma} W.$$

B. — Correction de système propre.

Au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$ les éléments qui se trouvaient en O au temps t sont, pour le flux Φ en C (fig. 3), pour le flux ψ en C′; ils ont donc respectivement les vitesses complémentaires indiquées sur la figure 3, soit $\frac{l_0}{2}\vec{\nabla}v_z$ et $-\frac{l_0}{2}\vec{\nabla}v_z$; au total on a une densité d'impulsion

$$\vec{D} = (\sigma'_\Phi - \sigma'_\psi)\frac{m_0 l_0}{2}\vec{\nabla}v_z = +\Omega_2\frac{m_0 l_0}{2}\vec{\nabla}v_z$$

soit sous forme générale :

$$\vec{D} = +\Omega_2\frac{S_i}{c\sigma}\vec{\nabla}v_i.$$

Pour retrouver un système d'impulsion nulle, il faut retrancher $\vec{D}$ de la densité d'impulsion.

C. — Correction sur l'énergie.

Nous avons vu que la somme des travaux des tensions $m_0c^2\sigma_\Phi$ et $m_0c^2\sigma_\psi$ des courants principaux dans un déplacement unité sur Oz, donne le terme principal $m_0c^2\sigma$ de W. Mais au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$ les tensions rectifiées s'obtiennent en donnant à σ'_Φ et σ'_ψ des compléments calculés comme σ_1 ci-dessus (en 4-E), soit

$$\frac{1}{c}\sigma'_\Phi \cdot \frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}v_z^\Phi \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma'_\psi}{c}\frac{\tau_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}v_z^\psi;$$

on trouve alors

$$m_0c^2\sigma'_\Phi\left[1 + \frac{\tau_0}{2c}\frac{\partial v_z}{\partial t}\right]$$

pour Φ, et

$$(+m_0c^2)\sigma'_\psi\left[+1 - \frac{\tau_0}{2c}\frac{\partial v_z}{\partial t}\right]$$

pour ψ. La somme donne :

$$E = m_0 c^2 \sigma + (\sigma'_\Phi - \sigma'_\psi) \frac{\hbar}{2c} \frac{\partial v_z}{\partial t} = m_0 c^2 \sigma + \frac{\Omega_2}{c\sigma} S_z \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Soit sous forme générale

$$E = m_0 c^2 \sigma + \frac{\Omega_2 S_i}{c\sigma} \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

D. — Composition des effets.

On vérifie que le quadrivecteur (IX-13)

$$J_\mu = \frac{\Omega_1}{\sigma} G_\mu - \frac{\Omega_2}{c\sigma} S_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu}$$

a pour composantes d'espace $J_i = K_i - D_i$ et pour composante de temps

$$J_4 = K_4 + \frac{1}{c} E.$$

Comme on a défini K_μ, on peut définir un nouveau quadrivecteur $J''_\mu = \Omega_1 \frac{J_\mu}{\sigma}$; la différence $G_\mu - J''_\mu$ est égale à $\frac{\Omega_1}{\sigma} J'_\mu$ (IX-14).

6. Etude en dehors du système propre.

Pour $v \neq 0$, on trouve en dehors de termes sans intérêt physique (les uns introduits par S_4, les autres par les dérivations des facteurs $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$) :

1° des contributions à $\vec{G}$ et à W.

2° une rotation complémentaire

$$\vec{\Delta} = + \frac{\vec{v}}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

La rotation $\vec{\Delta}$ confirme qualitativement la règle d'association d'une impulsion à une rotation. Néanmoins il nous paraît illusoire de chercher pour l'ensemble de ces termes une signification précise. D'une part en effet c'est seulement dans le système propre que $T_{\mu 4} = iG_\mu$; d'autre part $\mathfrak{A}$ n'a pas de sens physique en dehors du système propre.

Le fait que, si le mouvement est relativiste, les modèles ne sont possibles que dans le système de repos, apparaît aussi sur la vibration

élémentaire. Le mouvement de P sur (Γ) ayant la vitesse c, ne peut être suivi dans un référentiel que si la vitesse de translation est faible devant c. On peut aussi dire qu'il s'agit de fluctuations de $\vec{S}$ et de Ω_2, et ces deux grandeurs n'ont de sens concret que dans le système propre. (M. L. de Broglie l'a signalé pour le spin) [23]. C'est abstraitement, par l'invariance de la phase, que l'onde en propagation sera définie pour le système fixe, à l'annexe II.

7. Observation générale sur l'interprétation.

Le modèle ci-dessus paraît supposer que les fluides Φ et ψ sont des fluides réels. Peut-on maintenir l'interprétation avec un fluide de probabilité?

S'il s'agit de la répartition de probabilité d'une particule, la division en flux Φ et ψ peut s'interpréter de deux manières; on concevra :

— soit une particule simple, de chiralité aléatoire,

— soit une particule complexe formée de deux éléments, gauche et droit.

Dans l'étude des effets des variations des vitesses ou des densités, où les deux flux interviennent séparément, les deux conceptions sont admissibles, les grandeurs devenant des grandeurs probables; pour interpréter les courants compensateurs, on devra admettre une compensation statistique.

La première hypothèse ne permet pas d'expliquer les interactions browniennes. La seconde rend compte de celles qui ont lieu entre flux de chiralités contraires; pour comprendre celles qui intéressent les flux de même chiralité, il faudrait faire intervenir des probabilités d'interversion de chiralités, ce que le caractère oscillant de $\Omega_2 = \sigma'_\Phi - \sigma'_\psi$ dans la vibration élémentaire permet de ne pas exclure.

Mais cette deuxième hypothèse élimine l'idée du couplage permanent qui paraît nécessaire à l'existence d'une particule unique localisée. Il semble donc difficile de concilier la représentation avec l'existence des particules, si celles-ci sont privées du support d'un fluide réel.

ANNEXE II

COMPLÉMENTS SUR LA RELATIVITÉ

(Additif au chapitre XI)

De la contraction de Lorentz on déduit tout le formalisme relativiste, en supposant seulement que les formules de changement de coordonnées sont linéaires, homogènes et réciproques (ou à l'aide d'un autre critère algébrique équivalent). Mais, pour renforcer le principe explicatif posé au chapitre XII (2-B), nous allons montrer qu'il permet, si on lui adjoint celui de l'invariance des moyennes quadratiques au seuil de la diffusion, d'établir directement les lois relativistes.

D'après le principe, si (Σ_0) se meut avec une vitesse relativiste devant (Σ), seul (Σ) sera supposé macroscopique. *Toutes actions physiques, toutes mesures seront exercées à partir de* (Σ).

A. — Propagation des actions avec la vitesse c. Son invariance.

La nature brownienne du fluide rend évident que la propagation des actions physiques ait pour vitesse maximale c (orientation des vitesses des éléments suivant un axe et transmission des effets de choc en choc). Nous admettrons que toutes les actions physiques élémentaires ont la vitesse c, les vitesses inférieures étant des moyennes macroscopiques (comme la vitesse moyenne du fluide lui-même).

D'autre part la propagation d'une action élémentaire exercée de (Σ) en M sur le fluide au temps t fait intervenir sa structure locale au temps $t + \frac{\tau_0}{2}$, telle qu'elle apparaît dans (Σ), où elle est définie par la moyenne quadratique des distances à M. Cette moyenne étant invariante, il en est de même pour la structure locale du fluide, donc aussi pour la vitesse de propagation.

B. — Étude des ondes.

Nous étudions l'onde élémentaire de vitesse c.

Une vibration est une horloge. D'après le principe, on ne considère que des horloges fixes, et l'on compare deux expériences.

1° Dans le fluide immobile (F_0), on représente l'onde (de période T_0) par des horloges fixes dont le déphasage entre deux éléments (E_1) et (E_2) de distance x_0, est $\varphi_0 = \frac{2\pi x_0}{cT_0}$, Les éléments étant donnés, φ_0 définit l'onde.

2° Soit (F) le fluide mobile devant (Σ) avec la vitesse $\vec{v}$ suivant Ox. C'est maintenant dans (Σ) que nous considérons des ondes de vitesse c et des horloges dont le déphasage, entre deux points M et N à la distance x, est $\varphi = \frac{2\pi x}{cT}$.

Nous établissons comme suit une relation entre les deux expériences :

a) Nous choisissons M et N sur Ox tels que (E_1) et (E_2) passent respectivement au même instant en M et N.

b) Nous notons à ces passages le déphasage φ des horloges M et N; nous considérons conventionnellement [1] que les ondes se correspondent si $\varphi = \varphi_0$. Ceci revient à associer aux éléments une phase intrinsèque qui caractérise l'onde dans tous les systèmes.

Comme par *a*), on a : $x = x_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, on en déduit :

$$T = T_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (1)$$

C. — Étude de la simultanéité.

Le réglage des horloges se fait par émission d'ondes élémentaires.

Lançons une telle onde de M vers N au temps t défini ci-dessus; quand elle parviendra en N, l'élément (E_2) sera en M′, un autre élément (E_3) sera en N. A ce moment la vibration de (E_3) aura la phase, que nous choisissons nulle, de (E_1) au temps t; (E_1) aura pris la phase : $\varphi = \frac{2\pi x}{cT}$.

---

[1] Comme observé à l'annexe I, il n'y a d'image concrète que dans le système propre.

Voici donc deux événements que nous pouvons considérer comme simultanés dans (Σ) :

— phase zéro pour (E_3);

— phase φ pour (E_1).

Dans (F_0), si nous lançons une onde de (E_1) vers (E_2), la phase de la vibration de (E_1) quand (E_2) aura pris la phase nulle sera $\varphi_0 = \frac{2\pi E_1 E_2}{cT_0} = \varphi$.

L'instant où la phase de (E_1) est φ (onde en E_2) est donc cette fois séparé de l'événement associé (onde en E_3), par un retard t_0 de valeur absolue :

$$\frac{E_2E_3}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{NN'}{c};$$

et comme

$$NN' = \frac{vx}{c},$$

$$t_0 = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{vx}{c^2}. \tag{2}$$

D. — Formules de Lorentz.

Soient deux événements (ε_1) et (ε_2) se produisant en deux points A_1 et A_2 de (Σ) aux temps o et t, et qui intéressent des éléments (E_1) et (E_2). Notons l'élément (E_1') qui arrive en A_1 au temps t; on pourra associer à (E_1') et à (E_2) les deux événements (ε_1') et (ε_2), où (ε_1') est la phase de (E_1'). Ces événements étant simultanés dans (Σ), il en résulte dans F_0 un temps $t_0^{(2)}$ donné par (2).

(ε_1) et (ε_1') sont mesurés sur l'horloge de A_1; le temps $t_0^{(1)}$ correspondant dans le fluide libre est donné par (1); on a donc au total :

$$t_0 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

A cette formule s'ajoute celle qui traduit la contraction des longueurs

$$x_0 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

E. — Composition des vitesses.

Soit (Σ_0) se déplaçant devant (Σ) avec la vitesse v suivant Ox. Par rapport à (Σ) un mobile M a une vitesse V suivant Ox. Cherchons la vitesse v_0 de M par rapport à (Σ_0).

Pendant le temps dt, pris dans (Σ), M s'est déplacé de dx. Le système (Σ_0) est un fluide dont deux éléments (E) et (E′) coïncident respectivement avec M aux limites de la durée dt. La distance de (E) à (E′) est $(V - v)\,dt$.

Soit maintenant (Σ_0) libre; la contraction de Lorentz étant annulée, (E) et (E′) occupent une distance :

$$dx_0 = \frac{V - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,dt.$$

Le temps dt_0 mesuré dans (Σ_0) libre, entre les coïncidences de M avec (E) et (E′) est donné en fonction de dt et dx par (3), soit :

$$dt_0 = \frac{dt - v\frac{dx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)$$

d'où

$$v_0 = \frac{dx_0}{dt_0} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

F. — Grandeurs cinétiques.

La masse en mouvement m ayant reçu une définition brownienne, on obtient, en remplaçant m_0 par m, la quantité de mouvement relativiste $\vec{G} = m\vec{v}$; on prendra ensuite pour définition de la force

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d}{d\tau}\left[m_0\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right],$$

$$\left(\text{avec} \qquad d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right).$$

On obtient de même le tenseur impulsion-énergie; par exemple, dans un schéma « matière pure », l'impulsion passant par unité de temps dans la direction β traverse une surface unité normale à l'axe α est :

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha\, G_\beta = \frac{\rho_0}{m_0} G_\alpha G_\beta.$$

L'équivalence de la masse et de l'énergie donne la symétrie du tenseur.

C. — Moments cinétiques propres et spin.

La variance relativiste du moment cinétique propre a été justifiée par M. L. de Broglie [23] sur le schéma d'un rotateur M tournant avec une vitesse $\vec{v}_0$ autour d'un point C. Ce point est l'origine d'un système (Σ_0) animé par rapport à (Σ) d'une vitesse $\vec{v}$ suivant Ox; la vitesse de M par rapport à (Σ) est $\vec{V}$. On prend les moments des impulsions $\frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ et $\frac{m_0\vec{v}_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c_2}}}$. La composition des vitesses élimine les radicaux des deux dénominateurs, et il reste :

$$(4) \quad S_x = S_x^0 \qquad S_y = S_y^0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad S_z = S_z^0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Prendre ainsi l'impulsion relativiste, c'est remplacer la masse de repos par la masse en mouvement; c'est donc doter M d'une structure brownienne autonome. Or si la rotation de M figure la rotation interne d'un fluide lié à (Σ_0), M est aussi lié à Σ_0.

Dans (Σ_0) on devra, comme à l'annexe I, prendre pour moment cinétique

$$\vec{S}_0 = m_0\overrightarrow{GM}\wedge\vec{v}_0.$$

Dans (Σ) le spin, de même que la vibration élémentaire, n'a plus qu'une signification conventionnelle; nous l'obtiendrons à partir de $\vec{S}_0$ en faisant subir à $(\overrightarrow{GM})$ et $(\vec{v}_0)_x$ la contraction de Lorentz; d'où les formules (4), sans avoir eu à introduire les radicaux parasites.

Le schéma des deux flux donne aussi le résultat; le spin particulaire normal à la vitesse est, dans la déformation du modèle, multiplié par $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. On vérifie que la définition du spin comme moment cinétique orbital subsiste, l'orbite circulaire étant remplacée par l'orbite elliptique.

H. — Examen d'objections possibles.

1) On peut signaler que le cumul des pertubations de deux systèmes (S) et (Σ) sur un troisième (Σ') est difficile à concevoir; mais il paraît sans possibilité concrète. Par rapport à la Terre (S), pour

que (Σ) soit animé d'une vitesse relativiste en restant assez proche pour être soumis à son action perturbatrice, il doit probablement être de dimensions petites devant celles de (S). Si alors on lance de (Σ) avec une vitesse relativiste un autre système matériel, quand il aura atteint le mouvement uniforme l'action de (Σ) sur lui sera devenue négligeable devant celle de (S).

Notons que la composition des vitesses ne comporte pas ce cumul, car elle ne fait pas intervenir le repère lié au point mobile. La composition s'établit en ne considérant que l'action de (S) sur (Σ).

2) Le fait que deux systèmes matériels (S) et (S′) soient très éloignés n'empêche pas qu'ils puissent être mis en liaison relativiste par l'intermédiaire d'un autre système (Σ). Soient par exemple (S) la Terre, (S′) une étoile de vitesse $\vec{v}$ par rapport à la Terre, (Σ) un photon émis par (S′) vers (S), sa direction faisant dans (S′) un angle θ avec $\vec{v}$. Rappelons que la fréquence du photon n'a une signification concrète que si sa vitesse n'est pas strictement c (masse m_0 non strictement nulle). Soient alors w et w' les vitesses de (Σ) par rapport à (S) et (S′). L'action de (S′) sur (Σ) donne au photon une fréquence ν' reliée à la fréquence propre ν_0 par $\nu' = \dfrac{\nu_0}{\sqrt{1 - \dfrac{w'^2}{c^2}}}$.

L'action de (S) sur (Σ) donne de même une fréquence

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \dfrac{w^2}{c^2}}}$$

d'où

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - \dfrac{w'^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{w^2}{c^2}}} = \frac{\nu'}{\sqrt{1 - \dfrac{w^2}{c^2}}} \left(1 + v \frac{w'}{c^2} \cos\theta'\right)$$

$$\sim \frac{\nu'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta'\right).$$

On a bien l'effet Doppler, ν' étant la fréquence au repos.

D'autre part, si $m_0 \sim 0$, nous savons que la mesure faite sur (S) au contact du fluide photonique donnera la même vitesse de translation de (Σ) que la mesure faite sur (S′).

3) La disymétrie des rôles physiques de (S) et de (S′) n'est pas en opposition avec le principe de relativité. D'abord son expression mathématique subsiste, puisque nous avons retrouvé le formalisme; il reprend sa valeur physique si l'on ajoute à l'interversion des deux repères celle de leur importance relative (macroscopique ou microscopique).

4) Si l'on impute, dans le sens des idées de Mach sur l'inertie, les effets de relativité générale à une action des masses de l'univers, elle prolonge l'action rapprochée du système de mesure. Ces effets, en tant qu'ils ne sont pas liés à la vitesse, conduisent, plus directement encore que ceux de la relativité restreinte, à l'idée d'un support physique. D'ailleurs, supposer l'existence des gravitons, c'est bien admettre implicitement que la relativité n'est pas uniquement de nature géométrique.

Ces considérations rejoignent celles émises au chapitre XII à propos des effets produits sur un satellite artificiel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Newton et Wigner. *Localized states for elementary particules. Reviews of Modern Physics*, 21, 3, 1949, p. 400.
[2] Kolmogoroff. Mathematische Annalen, 104, 1931, pp. 414 à 458.
[3] Bass. Rapport technique n° 28-1946 (Groupement de recherches aéronautiques), *Les méthodes modernes du calcul des probabilités et leur application au problème de la turbulence.* — Régnier (voir [6] infra).
[4] Bass. Voir (3).
[5] Einstein. Théorie du mouvement brownien, *Annalen der Physik*, Mai 1908.
[6] Régnier. Introduction à l'étude dynamique des processus de diffusion, Thèse, 1955, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1959, volume XVI, fasc. II.
[7] Fenyes. *Zeitschrift für Physik*, 132, 1952, p. 8.
[8] Louis de Broglie. *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1956.
[9] Hofstaedter. *Reviews of Modern Physics*, 28, 3 juillet 1956, p. 214.
[10] Rosen. *Physical Review*, 72, 15 août 1947, p. 298.
[11] Takabayasi. Relativistic hydrodynamics of the Dirac matter. *Supplement of the Progress of th. Phys.*, 4, 1957.
[12] Hillion. *Thèse*, Décembre 1957, Sorbonne.
[13] Bohm, Schiller et Tiomno. A causal interpretation of the Pauli equation, supplement n° 1 du *Nuovo Cemento*, 1955, p. 48).
[14] F. Bloch. *Zeitschrift für Physik*, 61, 1920, p. 206.
[15] Neel. *Cahiers physiques*, 25, I, 1944.

[16] HERRING et KITTEL. *Physical Review*, 8, 1951, p. 869.
[17] Van der WAERDEN. *Die gruppentheoretische Methode in der Quanten Mechanik*, Springer, Berlin, 1932).
[18] TAKABAYASI. *Handed spinors and the theory of relativistic fields* (miméographe).
[19] ROMAN. *Theory of elementary particles*, North Holland, Publishing Company, Amsterdam, 1960.
[20] Louis de BROGLIE. *Une nouvelle théorie de la lumière*, Paris, Hermann, 1939.
[21] d'ESPAGNAT et PRENTKI. *Nuclear Physics*, 336, 1956, 34, 1957.
[22] BELINFANTE. *Physica*, 6, 1939, p. 887.
[23] Louis de BROGLIE. *La théorie des particules de spin* 1/2, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
[24] Jacques LÉVY. *Astronomie de position et relativité générale* (*Problèmes actuels en théorie de la relativité*, Éditions de la Revue d'Optique, Paris, 1959).

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS 1

INTRODUCTION 3

PREMIÈRE PARTIE.
Les processus de diffusion.

CHAPITRE I. — Rappel de notions sur les processus de Markoff absolument continus 11

CHAPITRE II. — L'équation de la diffusion pour les processus de Markoff et leur généralisation 21

CHAPITRE III. — Les caractères d'un fluide de type brownien. La notion de seuil de la diffusion 33

DEUXIÈME PARTIE.
Application à la mécanique quantique, sans intervention du spin.

CHAPITRE IV. — Position du problème. Travaux antérieurs ... 41

CHAPITRE V. — Les lois de la diffusion et la mécanique quantique non relativiste 46

CHAPITRE VI. — Essai d'une approche relativiste de la diffusion :
I. — Observations générales 54
II. — L'équation de la diffusion en dehors de l'approximation classique 55
III. — Le potentiel quantique relativiste et l'équation de Klein-Gordon 60
IV. — Les grandeurs caractéristiques de la diffusion et le changement de repère 63

CHAPITRE VII. — Étude de l'ordre d'approximation supérieur pour l'équation de la diffusion et le potentiel quantique :
I. — L'équation de la diffusion au second ordre en τ_0 69
II. — Recherche du potentiel quantique. Application à l'équation d'ondes 71

CHAPITRE VIII :
I. — Premières incidences 75
II. — Les relations d'incertitude 76
III. — La longueur l_0 et le « rayon » des particules 78

TROISIÈME PARTIE.
Application à la mécanique quantique avec effet du spin.

CHAPITRE IX. — Introduction du spin dans le processus de diffusion :
I. — La représentation de Takabayasi 81
II. — Propriétés cinétiques du globule aléatoire 84
III. — L'orbite (Γ) et l'équation de Dirac 87
IV. — La vibration élémentaire et l'onde quantique 92
V. — Cas de l'équation de Pauli 93

CHAPITRE X. — La décomposition du fluide de Dirac. Relations avec la diffusion :
I. — Étude mathématique 97
II. — Commentaire physique 102

CHAPITRE XI. — Structure des particules. États quantiques :
I. — Le schéma des deux flux et les grandeurs d'isoespace .. 106
II. — Les états quantiques d'une particule libre 111
III. — Les états stationnaires de l'atome d'hydrogène 113
IV. — Le cas des particules de masse nulle ou quasi nulle. 119

QUATRIÈME PARTIE.
Examen et suggestions. Annexes.

CHAPITRE XII. — Examen critique et suggestions :
I. — Sur la relation des résultats obtenus avec les bases physiques de la mécanique quantique 121
II. — Suggestions sur la relativité 130

ANNEXE I (additif au chapitre X). — Interprétation de la représentation de Takabayasi et de l'équation de Dirac 134

ANNEXE II (additif au chapitre XII). — Compléments sur la relativité 150

BIBLIOGRAPHIE 156

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Propagateurs et commentateurs de la relativité générale.

Vu et approuvé :
Paris, le 26 mai, 1963,
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE

IMPRIMERIE DURAND, LUISANT-CHARTRES (EURE-ET-LOIR)
Dépôt légal : 2e trimestre 1963. - N° 3955.